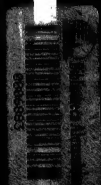


الطبعة  
الثانية

# الدوائر الكهربائية

تأليف  
جوزيف أ. ادمنستر

يحتوي الكتاب على أكثر من ٣٤٠  
مألة محلولة حلاً كاملاً





$$Q = VI \sin \theta = 2000 \sin 53.1^\circ = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحظ})$$

$$\text{p.f.} = \cos \theta = \cos 53.1^\circ = 0.6 \quad (\text{لاحظ})$$

### الطريقة الثالثة :

$$S = VI^* = (100 \angle 30^\circ)(20 \angle 23.1^\circ) = 2000 \angle 53.1^\circ = 1200 + j1600 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = \cos 53.1^\circ = 0.6 \quad (\text{لاحظ}) \quad S = 2000 \text{ VA} \quad P = 1200 \text{ W}, Q = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحظ})$$

### الطريقة الرابعة :

$$V_R = IR = 20 \angle 23.1^\circ (3) = 60 \angle 23.1^\circ \text{ V}, V_X = (20 \angle 23.1^\circ)(4 \angle 90^\circ) = 80 \angle 66.9^\circ \text{ V}$$

$$P = V_R^2/R = 60^2/3 = 1200 \text{ W}$$

$$Q = V_X^2/X = 80^2/4 = 1600 \text{ var} \quad (\text{لاحظ})$$

$$S = V^2/Z = 100^2/5 = 2000 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.} = P/S = 0.6$$

يجب الاحتياط عند التعميم في المعادلة  $P = V_R^2/R$  ، واتخذ الشائع هو استبدال  $V_R$  (الجهد عبر المقاومة فقط).

بالمجهود الكلي  $V$  عبر المقاومة  $Z$ .

### تصحيح عامل القدرة :

في التطبيقات المنزلية والصناعية يكون الحمل حثيا والتيار لاحقا للجهد المؤثر وتقاس القدرة المتوسطة  $P$  المسداة العمل بمقدار الشغل المستفاد به في وحدة الزمن . وترسل القدرة عادة من خلال محولات وخطوط توزيع .

وحيث أن المحول الذي يقدر بـ  $kVA$  عادة ما يكون ثابتا عند جهد معين فإن معدل  $kVA$  يدل غالباً على مقدار أكبر تيار مسموح به . وإذا وصلت سعة نفية أوحش تقي فإن المحول يكون عملاً تماماً وتكون القدرة المتوسطة المسداة لتأري صلباً نظرياً

بالإشارة إلى مثلث القدرة ، يمثل وتر المثلث  $S$  قياس الحمل في نظام التوزيع ويمثل الضلع  $P$  قياس القدرة المفيدة المسداة . وعلى ذلك فإنه من المستحسن جعل  $S$  أقرب ما يمكن من  $P$  أى جعل الزاوية  $\theta$  تقترب من الصفر . وحيث أن  $\cos \theta = \text{p.f.}$  فإن عامل القدرة يقترب من الوحدة . وفي الحالة العادية التي يكون فيها حملاً حثياً يمكن تحسين عامل القدرة وذلك بتوصيل سعة على التوازي مع الحمل . وبما أن الجهد على الحمل يظل ثابتاً فإننا نلاحظ القدرة المفيدة  $P$  لا تتغير أيضاً . وبما أن عامل القدرة يزداد فإن التيار والقدرة الظاهرية يقلان وبذلك نحصل على نظام توزيع ذي كفاءة عالية .

مثال ٢ :

في دائرة المثال (١) صمم عامل القدرة إلى 0.9 (لاحق) وذلك بإضافة سعة على التوازي . أوجد  $S'$  بعد إدخال التصحيح وكذلك القدرة المفاعلية لسمعة اللازمة لتصحيح .

بإعادة رسم مثلث القوى في المثال (١) ، مع مراعاة أن  $\cos \theta' = 0.9$  و  $\theta' = 26^\circ$  إذن

$$S' = P / \cos \theta = 1200 / \cos 26 = 1333 \text{ VA}$$

وبما أن (لاحق)  $Q' = S' \sin \theta' = 1333 \sin 26 = 585 \text{ var}$  شكل ٧ - ٩

والقدرة المفاعلية لسمعة تساوي  $Q - Q' = 1600 - 585 = 1015$  (سابق) .

وبحيث أن القدرة تظل ثابتة فإن الشغل المبذول يظل ثابتا بعد تصحيح عامل القدرة . وعلى ذلك فإن قيمة  $Q$  تظل من 2000 VA إلى 1333 VA .

مسائل محلولة

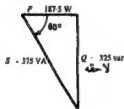
٧-١ إذا أصبحت دائرة يؤثر عليها جهد  $v = 150 \sin(\omega t + 10^\circ)$  volts وكان التيار الناتج  $i = 5 \sin(\omega t - 50^\circ)$  amperes ، فمبين مثلث القدرة .

$$V = (150/\sqrt{2}) \angle 10^\circ = 106 \angle 10^\circ \text{ V .}$$

$$I = (5 \sqrt{2}) \angle -50^\circ = 3.54 \angle -50^\circ \text{ A .}$$

إذن

$$P = \text{Re } VI^* = (106 \angle 10^\circ)(3.54 \angle 50^\circ) = 375 \angle 60^\circ = 187.5 \text{ W} , 375 \text{ VA}$$



$$P = \text{Re } VI^* = 187.5 \text{ W}$$

$$Q = \text{Im } VI^* = 325 \text{ var}$$

$$S = |VI^*| = 375 \text{ VA}$$

(لاحقة)

شكل ٧ - ١٠

$$\text{p.f.} = \cos 60^\circ = 0.5 \quad (\text{لاحق})$$

٧-٢ دائرة تتوالى تتكون من عنصرين لها قدرة 940 W وعامل قدرة 0.707 سابق . فإذا كان الجهد المؤثر

هو  $v = 99 \sin(6000\pi t + 30^\circ)$  volts فمبين ثوابت الدائرة .

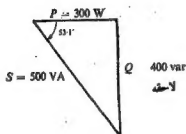
إن القيمة المقاديرة للجهد هي  $V = (99/\sqrt{2}) \angle 30^\circ = 70 \angle 30^\circ$  V. والقدرة هي  $P = VI \cos \theta$  أي  $940 = 70I(0.707)$  ، إذن  $I = 19$  . وبما أن عامل القدرة هو 0.707 سابق ، إذن يجب أن يسبق التيار المسارور الجهد بزاوية  $45^\circ$  ،  $\cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$  ، إذن  $I = 19 \angle 75^\circ$  A ومعاوقة الدائرة هي  $Z = R - jX_C$  . وبما أن  $Z = V/I = (70 \angle 30^\circ) / (19 \angle 75^\circ) = 3.68 \angle -45^\circ = 2.6 - j2.6 \Omega$  ، إذن  $X_C = 1/\omega C$  و

$$R = 2.6 \text{ ohms and } C = \frac{1}{6000(2.6)} = 64.1 \mu\text{F}$$

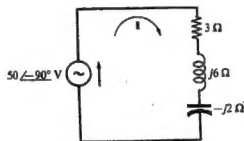
## طريقة أخرى :

بوضع  $I = 19$  في المعادلة  $P = I^2 R$  نحصل على  $940 = (19)^2 R$  ومنها  $R = 2.6 \Omega$  . إذن  $Z = Z \angle -45^\circ = 2.6 - jX_C$  و  $X_C = 2.6 \Omega$  ومنها ينتج أن  $C = 1/\omega X_C = 64.1 \mu\text{F}$  .

٧-٤ حين مثلت القدرة لتائرة التوالي الموضحة في الشكل ٧-١١ .



شكل ٧ - ١٢



شكل ٧ - ١١

من الشكل ٧-١١ نجد أن  $Z = 3 + j6 - j2 = 5 \angle 53.1^\circ \Omega$

$$I = V/Z = (50 \angle 90^\circ) / (5 \angle 53.1^\circ) = 10 \angle 143.1^\circ \text{ A}$$

إذن

$$S = VI^* = (50 \angle 90^\circ)(10 \angle 143.1^\circ) = 500 \angle 53.1^\circ = 300 + j400 \text{ VA}$$

والملاحظ مثلت القدرة الموضح في الشكل ٧-١٢ هي

$P = 300 \text{ W}$  و (لاحظ)  $Q = 400 \text{ var}$  و  $S = 500 \text{ VA}$  ، أما عامل القدرة فهو

$$pf = \cos 53.1 = 0.6 \quad (\text{لاحظ})$$

## طريقة أخرى :

بالتصويص من  $I = 10$  في معادلة القدرة لكل عنصر نجد أن

$$P = I^2 R = 10^2(3) = 300 \text{ W} \quad (\text{لاحظ}) \quad Q_{j6} = 10^2(6) = 600 \text{ var} \quad (\text{سابقة})$$

$$Q_{-j2} = 10^2(2) = 200 \text{ var} \quad (\text{لاحظ}) \quad Q = Q_{j6} + Q_{-j2} = 600 - 200 = 400 \text{ var}$$



و، بما أن  $P = I^2 R$  أي أن  $I_1^2(3) = 600$  إذن  $I_1 = 14.14 \text{ A}$  ، إذا كان  $V = 20 \angle 0^\circ$

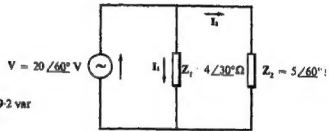
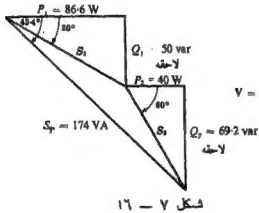
$$I_1 = 14.14 \angle -53.1^\circ = 8.48 - j11.31 \text{ A} \quad \text{إذن}$$

$$I_2 = 7.07 \angle 0^\circ = 7.07 \text{ A}$$

$$I_T = I_1 + I_2 = 15.55 - j11.31 = 19.25 \angle -36^\circ \text{ A}$$

وقراءة الأميتر هي  $19.25 \text{ A}$ .

٧-٦ بين مثلث القدرة لكل فرع من أفرع دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧-٦ ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الدائرة كلها .



الفرع ٢ :

$$I_2 = V/Z_2 = (20 \angle 60^\circ) / (5 \angle 60^\circ) = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$S_2 = VI_2^* = (20 \angle 60^\circ) (4 \angle 0^\circ) = 80 \angle 60^\circ \text{ VA} \\ = 40 + j69.2 \text{ VA}$$

إذن

$$P_2 = 40 \text{ W}$$

$$Q_2 = 69.2 \text{ var (لاحتة)}$$

$$S_2 = 80 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.}_2 = 0.5 \quad (\text{لاحتة})$$

الفرع ١ :

$$I_1 = V/Z_1 = (20 \angle 60^\circ) / (4 \angle 30^\circ) = 5 \angle 30^\circ \text{ A}$$

$$S_1 = VI_1^* = (20 \angle 60^\circ) (5 \angle -30^\circ) = 100 \angle 30^\circ \text{ VA} \\ = 86.6 + j50 \text{ VA}$$

إذن

$$P_1 = \text{Re } VI_1^* = 86.6 \text{ W}$$

$$Q_1 = \text{Im } VI_1^* = 50 \text{ var (لاحتة)}$$

$$S_1 = |VI_1| = 100 \text{ VA}$$

$$\text{p.f.}_1 = P_1/S_1 = 0.866 \quad (\text{لاحتة})$$

من النتيجة السابقة والشكل ١٦-٧ يمكن الحصول على مثلث القدرة كما يلي

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 50 + 69.2 = 119.2 \text{ var} \quad \text{و (لاحقة)} \quad P_T = P_1 + P_2 = 86.6 + 40 = 126.6 \text{ W}$$

$$S_T = P_T + jQ_T = 126.6 + j119.2 = 174 \angle 43.5^\circ \text{ VA} \quad \text{وبما أن}$$

$$p.f._T = P_T/S_T = 126.6/174 = 0.727 \quad \text{و (لاحق)} \quad S_T = |S_T| = 174 \text{ VA} \quad \text{إذن}$$

٧-٧ محرك جى يعطى قدرة 2 hp وكفاءته 85% ، فإذا كان عامل القدرة يساوى 0.8 لاحق ، فحين المعادلات الكائنة للقدرة الداخلة .

$$P_{in} = 2(746)/0.85 = 1755 \text{ W} \quad \text{إذن} \quad 1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.8) = 36.9^\circ \quad \text{ولكن} \quad S = 1755/0.8 = 2190 \text{ VA} \quad \text{و}$$

$$Q = 2190 \sin 36.9^\circ = 1315 \text{ var} \quad \text{إذن (لاحقة)}$$

٧-٨ عين مثلث القدرة لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ١٧-٧

علما بأن القدرة في المقاومة 2 Ω هي 20 W

$$\text{من} \quad P = I^2 R \quad \text{نجد أن} \quad I_1^2 (20) = 20 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

$$I_1 = 3.16 \text{ A} \quad \text{وبما أن} \quad Z_1 = 2 - j5 = 5.38 \angle -68.2^\circ \Omega$$

$$\text{إذن} \quad V = I_1 Z_1 = 3.16(5.38) = 17 \text{ volts} \quad \text{وإذا كان}$$

$$V = 17 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{إذن} \quad I_1 = 3.16 \angle -68.2^\circ \text{ A}, \quad I_2 = V/Z_2 = (17 \angle 0^\circ)/(j \sqrt{2} \angle 45^\circ) \text{ A}$$

$$I_T = I_1 + I_2 = 11.1 \angle -29.8^\circ \text{ A} \quad \text{و}$$

ولحساب مثلث القدرة فإنه يلزمنا معرفة

$$S_T = VI_T^* = 17 \angle 0^\circ (11.1 \angle 29.8^\circ) = 189 \angle 29.8^\circ = 164 + j94 \text{ VA}$$

ومنها نجد أن

$$p.f._T = 164/189 = 0.868 \quad \text{(لاحق)} \quad S_T = 189 \text{ VA}, \quad P_T = 164 \text{ W}, \quad Q_T = 94 \text{ var} \quad \text{(لاحقة)}$$

٧-٩ عين مركبات القدرة لمجموعة ثلاثة أحمال بالمواصفات الآتية : الحمل ١. 250 VA و 0.5 p.f. لاحق ،

حمل ٢ 180 W و 0.8 p.f. سابق ، حمل ٣ 300 VA ، 100 var (لاحقة)

يلزمنا حساب القدرة المتوسطة والقدرة المعافية لكل حمل أى أن



حمل ١ : سعة  $S = 250 \text{ VA}$  و  $p.f. = 0.5$  لاحق ، إذن

$$( \text{لاحقة} ) \quad \theta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ, \quad P = S \cdot p.f. = 250(0.5) = 125 \text{ W}$$

$$Q = S \sin \theta = 250 \sin 60^\circ = 216 \text{ var}$$

حمل ٢ : سعة  $P = 180 \text{ W}$  و  $p.f. = 0.8$  سابق . إذن

$$\theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ, \quad S = P/p.f. = 180/0.8 = 225 \text{ VA}$$

$$Q = 225 \sin 36.9^\circ = 135 \text{ var} \quad ( \text{سابقة} )$$

حمل ٣ : سعة  $S = 300 \text{ VA}$  و  $Q = 100 \text{ var}$  ( لاحقة )

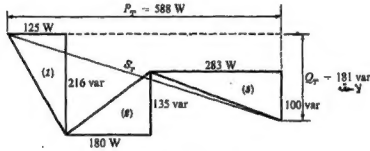
$$P = S \cos \theta = 300 \cos 19.5^\circ = 283 \text{ W} \quad \text{و} \quad \theta = \sin^{-1} (Q/S) = \sin^{-1} (100/300) = 19.5^\circ$$

$$\text{إذن} \quad P_T = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W} \quad ( \text{لاحقة} ) \quad Q_T = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ var}$$

$$\text{وبما أن} \quad S_T = P_T + jQ_T = 588 + j181 = 616 \angle 17.1^\circ \text{ VA}$$

$$p.f. = P/S = 588/616 = 0.955 \quad ( \text{لاحق} ) \quad S_T = 616 \text{ VA}$$

ورسوم الشكل ٧ - ١٨ مثلثات القوى للأحمال الثلاثة كل على حدة وكذلك لمجموع الأحمال



شكل ٧ - ١٨

٧-١٠ محول  $25 \text{ kVA}$  يغذى حملا بقدرة  $12 \text{ kW}$  ، فإذا كان عامل القدرة  $0.6$  لاحقا ، فأوجد النسبة المئوية لأقصى حمل يمكن أن يغذيه المحول . وإذا أصبح حمل بمعامل قدرة يساوى الوصلة إلى نفس المحول فأوجد الـ  $\text{kW}$  التي يمكن إضافتها قبل أن يصبح المحول محمل تماما .

في حالة حمل  $12 \text{ kW}$  نجد أن  $S = P/p.f. = 12/0.6 = 20 \text{ kVA}$  إذن النسبة المئوية لأقصى حمل

$$\text{تساوى } 80\% = (20/25) \times 100$$

$$\text{وبما أن} \quad \theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.1^\circ, \quad O = S \sin \theta = 20 \sin 53.1^\circ = 16 \text{ kvar}$$

وبما أن حامل القدرة لحمل الإضافي يساوى الوحدة ،  
إذن القدرة المخاطية تظل دون تغيير . إذن منه التجميع  
بأنفسه تكون الزاوية  $\theta' = \sin^{-1}(16/25) = 39.8^\circ$   
والقدرة الكلية

$$P_T = S' \cos \theta' = 25 \cos 39.8^\circ = 19.2 \text{ kW}$$

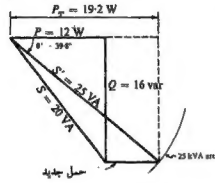
وعلى ذلك فإن الحمل الإضافي يساوى

$$P_T - P = 19.2 - 12 \\ = 7.2 \text{ kW}$$

ويمكن الوصول إلى النتيجة السابقة بيانيا كما هو  
موضح في الشكل ١٩-٧ .

لاحظ أن إضافة حمل بمعامل قدرة يساوى الوحدة

$$P.f. = \cos 39.8^\circ = 0.768 \text{ (لاحظ) أي أن :}$$



حامل جديد  
بمعامل قدرة يساوى واحد

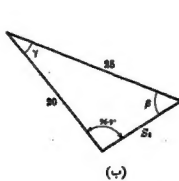
شكل ٧ - ١٩

١٩-٧ في المسألة ١٠-٧ ، إذا كان الحمل المضاف له معامل قدرة يساوى 0.866 سابق فأوجد عدد الـ kVA التي  
يمكن إضافتها بهذه الأحوال حتى يصبح المحرك محملا بمت الكفاءة .

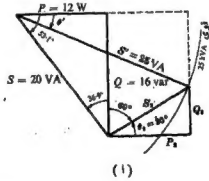
لنبدأ من المسألة ٧ - ١٠ أن  $S = 20 \text{ kVA}$  و  $\theta = 53.1^\circ$  (لاحظ) ،  $Q = 16 \text{ kvar}$  نرسم مثلث  
القدرة كما في الشكل ٧ - ٢٠ (١) ، وإضافة حمل جديد له  $S_2$  وزاوية  $\theta_2 = \cos^{-1}0.866 = 30^\circ$  فإنه  
يلزمنا تحديد  $\theta'$  ، ومن الشكل ٧ - ١٠ لدينا .

$$25/\sin 96.9^\circ = 20/\sin \beta, \sin \beta = 0.795, \beta = 52.6^\circ$$

$$\theta' = 53.1^\circ - 30.5^\circ = 22.6^\circ \quad \text{و} \quad \gamma = 180^\circ - (96.9^\circ + 52.6^\circ) = 30.5^\circ$$



(ب)



(١)

شكل ٧ - ٢٠

والقدرة والقدرة المفاعلية لحمل الكلي هما  $P_T = 25 \cos 22.6^\circ = 23.1 \text{ kW}$  و ( لاحظ )

$$P_2 = 23.1 - 12 = 11.1 \text{ kW} \text{ إذن لدينا الحمل الإضافي } Q_T = 25 \sin 22.6^\circ = 9.6 \text{ kvar}$$

و ( سابقة )  $Q_2 = 16 - 9.6 = 6.4 \text{ kvar}$  ، وبما أن  $S_2 = 12.8 \angle 30^\circ \text{ VA}$  ،  $S_1 = P_1 + jQ_1 = 11.1 - j6.4 = 12.8 \angle -30^\circ \text{ VA}$

$$S_3 = 12.8 \text{ kVA} \quad \text{إذن}$$

وعلى ذلك فإنه يمكن إضافة حمل جديد له  $12.8 \text{ kVA}$  بحامل قدرة  $0.866$  سابق إلى الحمل الأصل

$12 \text{ kW}$  التي حامل القدرة له يساوى  $0.6$  لاحق حتى يصبح المحول بكامل سعة .

### طريقة أخرى :

من الشكل ٧-٢٠ ( ١ ) والزاوية  $\theta_2 = 30^\circ$  ، لدينا

$$P_2 = S_2 \cos 30^\circ = 4(\sqrt{3}/2)S_2, \quad Q_2 = S_2 \sin 30^\circ = \frac{1}{2}S_2,$$

$$(S_2)^2 = (P + P_2)^2 + (Q - Q_2)^2$$

وبما أن

$$S_2 = 12.8 \text{ kVA} \quad \text{و} \quad (25)^2 = (12 + \sqrt{3}/2 S_2)^2 + (16 - \frac{1}{2} S_2)^2$$

١٢-٧ محول  $500 \text{ kVA}$  يعمل بكامل سعة بحامل قدرة كل يساوى  $0.6$

لاحق . فإذا أريد تحسين عامل القدرة بإضافة مجموعة مكثفات حتى

يصبح عامل القدرة الكلي يساوى  $0.9$  لاحق ، فليكن عدد الك

المكثفات المطلوبة . ثم احسب النسبة المئوية لتحميل المحول بعد التصحيح

عامل القدرة .

عندما يكون المحول بكامل سعة ( انظر الشكل ١٢-٧ ) فإن

$$P = VI \cos \theta = 500(0.6) = 300 \text{ kW}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0.6 = 53.1^\circ$$

$$Q = VI \sin \theta = 500 \sin 53.1^\circ = 400 \text{ kvar} \quad (\text{لاحقة})$$

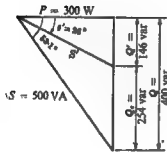
وعندما يكون  $\text{p.f.} = 0.9$  لاحق ، فإن

$$Q' = 333 \sin 26^\circ = 146 \text{ kvar} \quad (\text{لاحقة}) , \quad S' = 300/0.9 = 333 \text{ kVA} \quad \text{و} \quad \theta' = \cos^{-1} 0.9 = 26^\circ$$

إذن عدد الك مكثفات اللازمة هي

$$Q - Q' = 400 - 146 = 254 \quad (\text{سابقة})$$

والنسبة المئوية لتحميل المحول هي  $\frac{(333/500)100}{\%} = 66.7\%$



شكل ٧ - ٢١

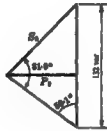
٧-١٣ مجموعة من المحركات الخفية متوسط قدرتها الإكلية 500 kW وعامل القدرة لها 0.8 لاحق ، يراد إعادة تشغيلها جزئيا بمجموعة محركات التزامنية لها نفس الكفاءة ولكن عامل القدرة لها 0.707 سابق . ومع استمرار برنامج التشغيل يتضمن عامل القدرة بالاستمرار . أوجد النسبة المئوية للقدرة الفعلية التي يمكن توصيله عندما يعمل عامل القدرة المجموعة 0.9 لاحق .

بما أن المحركات التزامنية لها نفس كفاءة المحركات الخفية فإن متوسط القدرة الكلية يبقى ثابتا عند 500 kW ، ولدينا قبل إعادة تشغيل المحركات .

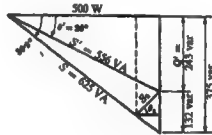
$$Q = 625 \sin 36.9^\circ = 375 \text{ kvar} \quad \text{لاحقة} \quad \theta = \cos^{-1} 0.8 = 36.9^\circ \quad , \quad S = 500/0.8 = 625 \text{ kVA}$$

وعندما يصحح عامل القدرة 0.9 لاحقاً يكون

$$Q' = 556 \sin 26^\circ = 243 \text{ kvar} \quad \text{لاحقة} \quad \theta' = \cos^{-1} 0.9 = 26^\circ \quad , \quad S' = 500/0.9 = 556 \text{ kVA}$$



(أ)



(ب)

شكل ٧ - ٢٢

وبما أن عامل القدرة التزامنية 0.707 ، أي أن  $\theta_2 = \cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$  ، فإن

إلا من الشكل ٧-٢٢ (ب) وتطبيق قانون الجيب نحصل على

$$S_2 / \sin 53.1^\circ = 132 / \sin 81.9^\circ , S_2 = 106.5 \text{ kVA}$$

$$P_2 = 106.5 \cos 45^\circ = 75.3 \text{ kW} \quad \text{إذن}$$

$$(75.3/500) 100 = 15\% \quad \text{والنسبة المئوية لتحميل هي}$$

مسائل أسئلة

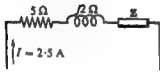
- ١٤ -  $v$  من بالكامل مثل القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو  $v = 200 \sin(\omega t + 110^\circ)$  volts والتيار الناتج هو  $i = 5 \sin(\omega t + 20^\circ)$  amperes : لاحتة  $Q = 300 \text{ var}$  و  $P = 0$
- ١٥ -  $v$  من بالكامل مثل القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو  $v = 14.14 \cos \omega t$  volts والتيار الناتج هو  $i = 17.1 \cos(\omega t - 14.05)$  milli-amperes
- الجواب :  $p.f. = 0.97$  لاحق ،  $Q = 29.6 \text{ mvar}$  لاحتة ،  $P = 117.5 \text{ milliwatts}$
- ١٦ -  $v$  من بالكامل مثل القدرة لدائرة ، إذا علمت أن الجهد المؤثر هو  $v = 340 \sin(\omega t - 60^\circ)$  volts والتيار الناتج هو  $i = 13.3 \sin(\omega t - 48.7)$  amperes
- الجواب :  $Q = 442 \text{ var}$  سابقة ،  $P = 2215 \text{ W}$  ،  $p.f. = 0.98$  سابق
- ١٧ -  $v$  من مثل القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين  $R = 10 \Omega$  ،  $X_C = 5 \Omega$  إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهد المؤثر هي  $120 \text{ V}$
- الجواب :  $S = 1154 - j577 \text{ VA}$  ،  $p.f. = 0.894$  سابق
- ١٨ -  $v$  من مثل القدرة لدائرة توالى تتكون من عنصرين  $R = 5 \Omega$  ،  $X_L = 15 \Omega$  إذا علمت أن القيمة الفعالة للجهد عبر المقاومة هي  $31.6 \text{ V}$
- الجواب :  $S = 200 + j600 \text{ VA}$  ،  $p.f. = 0.316$  لاحق
- ١٩ -  $v$  من المعلومات الكاملة عن قدرة دائرة توالى تتكون من عنصرين  $R = 8 \Omega$  و  $X_C = 6 \Omega$  إذا علمت أن الجهد المؤثر هو  $V = 50 \angle -90^\circ$
- الجواب :  $S = 200 - j150 \text{ VA}$  ،  $p.f. = 0.8$  سابق
- ٢٠ -  $v$  من معاوقة الدائرة التي تأخذ  $3040 \text{ VA}$  بمعامل القدرة  $0.894$  سابق إذا كان الجهد المطاوع المؤثر هو  $V = 150 \angle 45^\circ$
- الجواب :  $Z = 4 - j2 \Omega$
- ٢١ -  $v$  من معاوقة تأخذ  $3500 \text{ VA}$  بمعامل قدرة  $0.76$  لاحق ، فإذا كانت القيمة الفعالة للتيار المار في المعاوقة هي  $18 \text{ A}$  فحين هذه المعاوقة
- الجواب :  $Z = 77.0 \Omega + j9.21$
- ٢٢ -  $v$  دائرة توالى تتكون من عنصرين ، فإذا كانت معاوقة التيار المار بها هي  $4.24 \sin(5000t + 45^\circ)$  amperes وقيمة الدائرة  $180 \text{ W}$  وعامل القدرة  $0.8$  لاحق ، فحين ثوابت الدائرة
- الجواب :  $R = 20 \text{ ohms}$  و  $L = 3 \text{ mH}$

٧ - ٢٣ معاومتان  $Z_1 = 5 \angle -59^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 8.95 \angle 63.4^\circ \Omega$  متصلتان على التوالي ، فإذا كانت القيمة الفعلية التيار المار بها هي 5A ، فحين المعلومات الكاملة عن القدرة .

الجواب :  $S = 175 + j75 \text{ VA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.918$  لاحق

٧ - ٢٤ معاومتان  $Z_1 = 5 \angle 45^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 10 \angle 30^\circ \Omega$  متصلتان على التوالي فإذا كانت  $Q$  الكلية لها لاحقة وتساوى 1920 var فأوجد متوسط القدرة  $P$  والقدرة الظاهرية  $S$  .

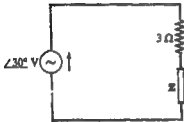
الجواب :  $S = 3350 \text{ VA}$  ،  $P = 2745 \text{ W}$



شكل ٢٣ - ٧

٨ - ٢٥ تأخذ دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٣ - ٧  $36.4 \text{ VA}$  بمعدل قدرة 0.856 لاحق ، عين  $Z$  في هذه الدائرة .

الجواب :  $Z = 1 \angle 90^\circ \Omega$



شكل ٢٤ - ٧

٨ - ٢٦ إذا كانت قدرة دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٤ - ٧ هي 300W وعامل القدرة لها 0.6 لاحق ، فعين بالكامل مثلث القدرة وكذلك الملوحة الجهرية .

الجواب :  $R = 300 + j400 \text{ VA}$  ،  $Z = 4 \angle 90^\circ \Omega$

٧ - ٢٧ معاومتان  $Z_1 = 5 \angle 60^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 4 \angle -30^\circ \Omega$  متصلتان على التوازي ويؤثر عليهما جهد بطاير  $V = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$  . أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجسهما لتصل على مثلث القدرة الكلي .

الجواب :  $Q = 19.3 \text{ var}$  لاحق ،  $P = 126.6 \text{ W}$  ،  $\text{p.f.} = 0.99$  لاحق

٧ - ٢٨ دائرة تتكون من  $R = 10 \Omega$  متصلة على التوازي مع  $Z = 8 \angle -30^\circ \Omega$  . فإذا كانت القيمة الفعلية التيار الكلي تساوي 5A ، فأوجد بالكامل مثلث القدرة .

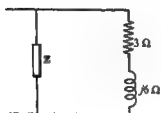
الجواب :  $P = 110 \text{ W}$  ،  $Q = 33 \text{ var}$  سابقة ،  $\text{p.f.} = 0.957$  سابق .

٧ - ٢٩ إذا كان الفرع 1 في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٢٥ - ٧ يحتوي على  $8 \text{ kvar}$  ، فأوجد القدرة وعامل القدرة للفرع كلها .

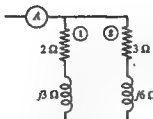
الجواب :  $8 \text{ kw}$  ،  $\text{p.f.} = 0.555$  لاحق .

٧ - ٣٠ إذا كان الفرع 2 في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٢٦ - ٧ يحتوي على 1490 volt amperes ، فأوجد قراءة الأميتر ، عين المعلومات الكاملة عن القدرة .

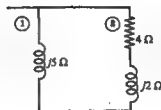
الجواب :  $42.4 \text{ A}$  ،  $S = 2210 + j3630 \text{ VA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.521$  لاحق



شكل ٢٥ - ٧



شكل ٢٦ - ٧



شكل ٢٧ - ٧

٢٥ - ٧ في دائرة التوازي الموضوعة في الشكل ٢٥-٧ ، كانت قدرة المقاومة  $3 \Omega$  هي  $666 \text{ W}$  لذا كانت الدائرة كلها تأخذ  $3370 \text{ VA}$  بمعدل قدرة  $0.937$  سابق ، فأوجد  $Z$  .

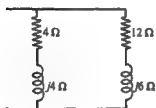
الجواب :  $Z = 2 - j2 \Omega$

٢٦ - ٧ إذا كانت دائرة التوازي الموضوعة في الشكل ٢٦-٧ لها قدرة كلية  $1500 \text{ W}$  ، فحين بالكامل مثلت القدرة .

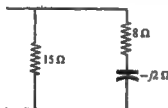
الجواب :  $S = 1500 + j2480 \text{ VA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.518$  لاحق

٢٧ - ٧ إذا كانت القدرة الكلية لدائرة التوازي الموضوعة في الشكل ٢٧-٧ هي  $2000 \text{ W}$  ، فأوجد القدرة في كل مقاومة .

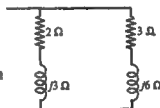
الجواب :  $P_{10} = 724 \text{ W}$  ،  $P_6 = 1276 \text{ W}$



شكل ٢٨ - ٧



شكل ٢٩ - ٧



شكل ٣٠ - ٧

٢٨ - ٧ إذا كانت  $Q$  الكلية لدائرة التوازي الموضوعة في الشكل ٢٨-٧ لائحة وتساوي  $2500 \text{ var}$  ، فحين بالكامل مثلت القدرة .

الجواب :  $S = 3920 \text{ VA}$  ،  $P = 3020 \text{ W}$  و  $\text{p.f.} = 0.771$  لاحق

٢٩ - ٧ أوجد حامل القدرة لدائرة التوازي الموضوعة في الشكل ٢٩-٧ . إذا غيرت المقاومة  $6 \Omega$  ليصبح حامل القدرة  $0.9$  لاحق فأوجد قيمة المقاومة الجديدة .

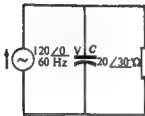
الجواب :  $R = 3.22 \Omega$  ،  $\text{p.f.} = 0.8$  لاحق

٧ - ٣٩ إذا كان الحمل الأساسي الدائرة الموضحة في الشكل ٦-٣٢ هو  $Z_L = 5 + j8.66 \Omega$  ، فإذا أضيف له مكثف  $20 \mu F$  على التوازي وذلك لتحسين عامل القدرة ، فأوجد النسبة المئوية للنقص في التيار الكلي .

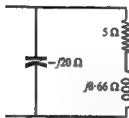
الجواب : 38 %

٧ - ٣٧ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٧-٣٣ ، أوجد سعة المكثف  $C$  اللازمة لتصحيح عامل القدرة ليصبح 0.95 لاحق .

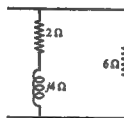
الجواب :  $C = 28.9 \mu F$



شكل ٧ - ٣٣



شكل ٧ - ٣٢



شكل ٧ - ٣١

٧ - ٣٨ مصدر جهد تردده 60 Hz وثيقته الفعالة 240V ، يغذي حملاً بـ 4500VA بمعامل قدرة 0.75 لاحق . أوجد سعة المكثف اللازم توصيله على التوازي مع الحمل لتحسين عامل القدرة إلى (أ) 0.9 لاحق ، (ب) 0.9 سابق .

الجواب : (أ)  $61.3 \mu F$  ، (ب)  $212 \mu F$

٧ - ٣٩ في المسألة ٧-٣٨ أوجد النسبة المئوية للنقص في تيار الخط الناتج في الجزء (أ) . هل يوجد أي نقص آخر في تيار الجزء (ب) ؟

الجواب : 16.7% ، لا ، للتيارات نظيل كما هي .

٧ - ٤٠ ثلاث معاودت  $Z_1 = 20 \angle 30^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 15 \angle 45^\circ \Omega$  ،  $Z_3 = 10 \angle 0^\circ \Omega$  متصلة على التوازي ويؤثر عليهم مصدر جهد  $V = 100 \angle 45^\circ V$  . أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم اجمعهما لتحصل على مثلث القدرة الكلي . الجواب :  $P = 1904 W$  ،  $Q = 221 var$  ،  $S = 1920 VA$  ،  $p.f. = 0.993$  سابق .

٧ - ٤١ في المسألة ٧-٤٠ إذا كان مصدر الجهد 100V يغذي الأفرع الثلاثة في دائرة التوازي بـ 1920 VA بمعامل قدرة 0.993 سابق ، فاحسب التيار الكلي الذي تأخذ به الدائرة .

الجواب : 19.2A سابق للجهد V بزاوية  $-6.62^\circ$



٧ - ٤٧ مصدر  $V = 240 \angle -30^\circ$  يؤثر على ثلاث معاوقات  $Z_1 = 25 \angle 15^\circ \Omega$  ،  $Z_2 = 15 \angle 60^\circ \Omega$  ،  $Z_3 = 15 \angle 90^\circ \Omega$  متصلة على التوازي . أوجد مثلث القدرة لكل فرع ثم أجمعهما لحصل على مثلث القوى الكلي .

الجواب :  $P = 4140 \text{ W}$  ،  $Q = 1115 \text{ var}$  ،  $S = 4290 \text{ VA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.967$  لاحق .

٧ - ٤٣ أوجد مثلث القدرة الكلي للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ ،  $\text{kW}$  بمامل قدرة  $0.8$  لاحق ، حمل ٢ ،  $2.4 \text{ kVA}$  له تسارى  $2 \text{ kvar}$  سابقة ، حمل ٣ ،  $6 \text{ KVA}$  بمامل قدرة  $0.9$  لاحق .

الجواب :  $P = 13.86 \text{ kW}$  ،  $Q = 4.38 \text{ kvar}$  ،  $S = 14.55 \text{ kVA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.965$  لاحق .

٧ - ٤٤ أوجد مثلث القدرة الكلي للأحمال الثلاثة التالية : حمل ١ ،  $200 \text{ VA}$  بمامل قدرة  $0.7$  لاحق ، حمل ٢ ،  $350 \text{ VA}$  بمامل قدرة  $0.5$  لاحق ، حمل ٣ ،  $275 \text{ VA}$  بمامل قدرة يساوى الوحدة .

الجواب :  $P = 590 \text{ W}$  ،  $Q = 446 \text{ var}$  ،  $S = 740 \text{ VA}$  ،  $\text{p.f.} = 0.798$  لاحق .

٧ - ٤٥ حمل  $300 \text{ kW}$  بمامل قدرة  $0.65$  لاحق يراد تحسين عامل القدرة له إلى  $0.90$  لاحق وذلك بإضافة مكثف على التوازي . احسب عدد  $\text{kVA}$  المكثف المطلوب وكذلك النسبة المئوية لنقص في  $\text{kVA}$  الناتج .

الجواب :  $204 \text{ kvar}$  ،  $28\%$  .

٧ - ٤٦ حمل صناعي  $25 \text{ kVA}$  عامل القدرة الكلي له  $0.8$  لاحق . وصل به مجموعة مقاومات وحدات تحسين ( $\text{p.f.}$  يساوى الوحدة) ، فوجد أن عامل القدرة للحقل الصناعي كله  $0.85$  لاحق احسب عدد  $\text{kW}$  التي تأخذها مقاومات التحسين .

الجواب :  $4.3 \text{ kW}$  .

٧ - ٤٧ حمل عبارة عن محرك حتى  $1500 \text{ W}$  بمامل قدرة  $0.75$  لاحق . وصل مع محركات متزامنة  $500 \text{ VA}$  بمامل قدرة  $0.65$  سابق . احسب  $\text{Kvar}$  المكثفات اللازمة لتحسين عامل القدرة الكلي لمجموعتي المحركات إلى  $0.95$  لاحق . احسب كذلك النسبة المئوية لنقص في  $\text{VA}$  الناتج .

الجواب :  $347 \text{ var}$  ،  $6.3\%$  .

٧ - ٤٨ صحح عامل القدرة لحمل إلى  $0.9$  لاحق وذلك بإضافة مكثفات  $20 \text{ kvar}$  ، فإذا كان  $\text{kVA}$  النألي هو  $185$  ، فأوجد مثلث القدرة للحمل قبل التصحيح .

الجواب :  $P = 166.5 \text{ kW}$  ،  $Q = 101.0 \text{ kvar}$  ،  $\text{p.f.} = 0.856$  لاحق .

٧ - ٤٩ وصل محرك حتى  $2000 \text{ VA}$  بمامل قدرة  $0.8$  لاحق مع محركات تزامنية  $500 \text{ VA}$  ، فإذا كان عامل القدرة الكلي لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للمحركات التزامنية .

الجواب :  $0.92$  سابق .

٧ - ٥٥ وصل حمل  $65 \text{ kVA}$  بمعامل قدرة لاحق مع  $25 \text{ kVA}$  محركات ثلاثية بمعامل قدرة  $0.6$  سابق . فإذا كان عامل القدرة الكلي  $0.85$  لاحقاً ، فأوجد عامل القدرة للحمل  $65 \text{ kVA}$  .  
الجواب :  $0.585$

٧ - ٥٦ محول  $100 \text{ kVA}$  حمل إلى  $80\%$  من تحميله الكلي وكان عامل القدرة  $0.85$  لاحقاً . فإذا وصل به حمل عامل القدرة له  $0.6$  لاحق ، فأوجد عدد الـ  $\text{kVA}$  لهذا الحمل بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .  
الجواب :  $21.3 \text{ kVA}$

٧ - ٥٧ محول  $250 \text{ kVA}$  محمل تحميلاً كلياً وعامل القدرة له  $0.8$  لاحق . فإذا أردنا تصحيح عامل القدرة إلى  $0.9$  لاحق وذلك بإضافة مكثفات على التوازي ، فاحسب (أ) عدد  $\text{kvar}$  المكثفات المطلوبة ، (ب) عدد  $\text{kW}$  لحمل جديد عامل القدرة له يساوى الوحدة يمكن إضافته بشرط عدم زيادة معدل التحميل الكلي للمحول .  
الجواب :  $52.5 \text{ kvar}$  ،  $30.0 \text{ kW}$

٧ - ٥٨ ن المسألة ٧-٥٦ إذا وصلنا حملاً جديداً عامل القدرة له  $0.5$  لاحق إلى المجموعة بعد توصيل المكثفات فاحسب عدد  $\text{kVA}$  لهذا الحمل الذي يمكن إضافتها مع عدم زيادة معدل  $\text{kVA}$  المحول .  
الجواب :  $32 \text{ kVA}$

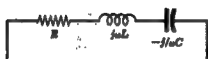
## الفصل الثامن

### رنين التوالي والتوازي

#### مقدمة :

يقال عن دائرة إنها في حالة رنين إذا كان الجهد المؤثر  $V$  والتيار الناتج  $I$  في طور واحد . وعلى ذلك فإنه في حالة الرنين تكون المقاومة المكافئة للدائرة من المقاومة  $R$  فقط .  
وحيث أن  $V$  و  $I$  في طور واحد فإن حامل القدرة للدائرة رنين يساوى الوحدة .

#### رنين التوالي :

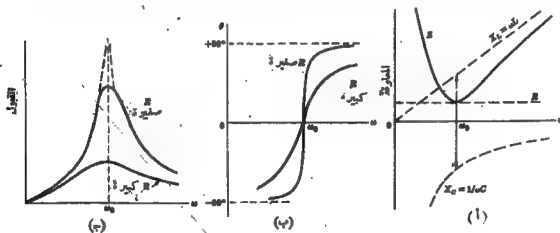


شكل ٨-١

مقاومة الدائرة التي تتكون من  $RLC$  على التوالي والموصلة في الشكل ٨-١ هي  $Z = R + j\omega L - 1/j\omega C = R + jX$  وعلى ذلك فإن الدائرة تكون في حالة رنين إذا كانت  $X = 0$  أي عندما  $\omega L = 1/\omega C$  أو  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$  . وبما أن  $\omega = 2\pi f$  فإن ذبذبة الرنين تعطى بالمعادلة .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

يوضح الشكل ٨-١ (١) تغير القيمة المطلقة لـ  $Z$  وكذلك مركبتها الثلاثة  $R$  و  $X_L$  و  $X_C$  كدوال في  $\omega$  . ونلاحظ أنه عندما  $\omega = \omega_0$  فإن الممانعة الحية تساوى الممانعة السعوية ، وبما أن  $|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$  فإن  $Z = R$  . وعلى ذلك فإن المقاومة  $Z$  تكون أصغر ما يمكن عند الرنين ، بما أن  $I = V/Z$  فإن التيار يكون نهاية كبرى .



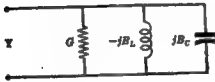
شكل ٨-١ . كدوال  $Z$  و  $\theta$  و  $\cos \theta$  كدوال في  $\omega$

وعند ذبذبات أقل من  $\omega_0$  فإن الممانعة السعوية تكون أكبر من الممانعة الحثية ، ولهذا تكون زاوية المعاودة سالبة . إذا كانت قيمة المقاومة صغيرة فإن الزاوية تتغير بسرعة أكبر مع التذبذب كما هو موضح في الشكل ٨-٢ (ب) . وعندما تقترب  $\omega$  من الصفر فإن زاوية المعاودة تقترب من  $90^\circ$  - .

وعند ذبذبات أكبر من  $\omega_0$  فإن الممانعة الحثية تكون أكبر من الممانعة السعوية ، ولهذا تكون زاوية المعاودة موجبة وتقترب من  $90^\circ$  + عندما  $\omega \gg \omega_0$  .

يوضح الشكل ٨-٢ (ج) تغير مسامحة دائرة التوال  $Y = 1/Z$  كدالة في  $\omega$  . وبما أن  $Y = Y^* = I/V$  فإن هذا الرسم يعطى أيضا دلالة على تغير التيار مع  $\omega$  . وعلى ذلك فإن الشكل ٨-٢ (ج) يوضح أن التيار يصل إلى نهايته العظمى عند  $\omega_0$  ، وعندما تكون قيمة المقاومة صغيرة فإن قيمة التيار تكون كبيرة . ويوضح المنحنى التغير في الحالة النهائية عندما  $R = 0$  . وزاوية المساحة (غير موصوفة هنا) تساوي سالب زاوية المعاودة الموصوفة في الشكل ٨-٢ (ب) .

### دوائر التيار المتردد ، دائرة RLC



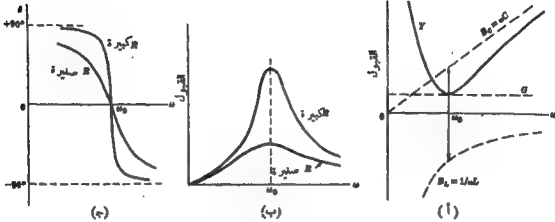
شكل ٨-٣

تعرف دائرة التيار المتردد الموصوفة في الشكل ٨-٣ والتي تتكون من أفرع في كل منها عنصر من العناصر  $R$  ،  $L$  ،  $C$  بأنها دائرة متالفة . وعلى ذلك فإن حل هذه الدائرة من الأهمية في موضوع الرنين عموما . ويمكن مقارنة دائرة التيار المتردد المتالفة هذه بدائرة التوال السابق دراستها ما يوضح أزدواجية مشتركة بين الدائرتين .

إن مسامحة العناصر الثلاثة هي  $Y = G + j(\omega C - 1/\omega L) = G + jB$  حيث  $B_C = \omega C$  ،  $B_L = 1/\omega L$  . أي عندما  $\omega C = 1/\omega L$  أو  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  ،  $B = 0$  . وبذلك فإن دوائر  $RLC$  في حالة رنين عندما  $B = 0$  . وبما أن  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  ،  $B = 0$  . وبذلك فإن دوائر  $RLC$  في حالة رنين عندما  $B = 0$  . وبما أن  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  ،  $B = 0$  . وبذلك فإن دوائر  $RLC$  في حالة رنين عندما  $B = 0$  .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

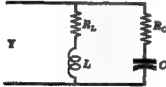
ويوضح الشكل ٨-٤ (أ) تغير كل من القيمة المطلقة للممانعة  $Y$  ومركباتها الثلاثة  $B_C$  ،  $B_L$  ،  $G$  كنوال في التذبذب  $\omega$  . وعند  $\omega = \omega_0$  فإن التذبذب السعوية والحثية تكونان متساويتين  $Y = G$  . وعلى ذلك فقد الرنين تكون للممانعة نهاية صفرى ، وبما أن  $I = VY$  فإن التيار يكون نهاية صفرى أيضا .



شكل ٨-٤ دائرة توازي  $Z$  ،  $Y$  و  $\theta$  دواك في  $\omega$

عند ذبلة أقل من  $\omega_0$  تزيد التغطية الحدية من التغطية السعوية وتكون زاوية  $\phi$  سالبة . وعلى ذلك فإن زاوية المعاوقة تكون موجبة وتقترب من  $90^\circ +$  عندما تقترب  $\omega$  من الصفر . انظر الشكل ٨-٤ (ج) .

وعند ذبلة أكبر من  $\omega_0$  فإن زاوية  $Z$  تكون سالبة ويكون للتيارها كثافة في  $\omega$  أسرع عندما تكون كمية  $R$  كبيرة .



#### رنين التوازي ، دائرة من فرعين

تكون المساحة  $Y$  لدائرة التوازي المكونة من فرعين المتوسطة في الشكل ٨-٥ من مجموع مساحة كل فرع على حدة .

$$\begin{aligned} \text{شكل ٨-٥} \quad Y &= Y_L + Y_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} \\ &= \left( \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left( \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right) \end{aligned}$$

والدائرة تكون في حالة رنين إذا كانت المساحة المركبة صفرًا ، أي  $X_C/(R_C^2 + X_C^2) = X_L/(R_L^2 + X_L^2)$  ، إذن

$$(1) \quad \frac{1}{\omega_0^2 C} (R_L^2 + \omega_0^2 L^2) = \omega_0 L (R_C^2 + 1/\omega_0^2 C^2)$$

ويمكن تغيير أي من الكميات الخمس الموجودة في المعادلة (١) للحصول على الرنين .

وبحل المعادلة (١) للحصول على  $\omega_0$  نجد أن

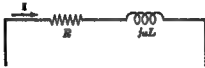
$$(2) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$



### عامل الجودة $Q$

يسمى عامل الجودة للملفات والمكثفات والدوائر بأنه

$$\text{عامل الجودة } Q = \frac{\text{أكبر طاقة مخزنة}}{2\pi \times \frac{\text{الطاقة الممتصة في كل دورة}}{\text{دورة}}}$$



شكل ٨ - ٦

تعطى الطاقة المستنزفة في الدورة للدائرة المخزنة في الشكل ٨ - ٦ والشكل ٨ - ٧ بمعامل ضرب متوسط الطاقة في المقاومة  $(I_{\max}/\sqrt{2})^2 R$  وزمن الدورة  $T$  أو  $1/f$ .

ويعطى أكبر طاقة مخزنة في دائرة التوالي  $RL$  المخزنة في الشكل ٨ - ٦ بالقيمة  $\frac{1}{2}LI_{\max}^2$ . إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_{\max}^2}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{2\pi fL}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

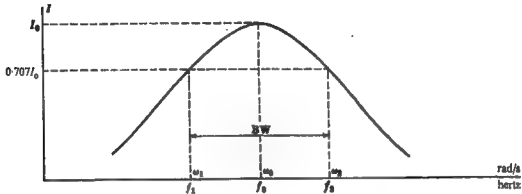
ويعطى أكبر طاقة في دائرة التوالي  $RC$  المخزنة في الشكل ٨ - ٧ بالقيمة  $\frac{1}{2}CV_{\max}^2$  أو  $\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2 C$ . إذن

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_{\max}^2/\omega^2 C}{(I_{\max}^2/2)R(1/f)} = \frac{1}{\omega CR}$$

والطاقة المخزنة في دائرة  $RLC$  على التوالي عند الرنين ثابتة . وذلك لأنه عندما يكون جهد المكثف أكبر ما يمكن يكون تيار الملف مساوياً للصفر والعكس بالعكس ،  $\frac{1}{2}CV_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2$  ، إذن

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

في دائرة التوالي  $RLC$  نجد أن تيار دائرة في التذبذبة مشابه لنسخي المساحة في الشكل ٨ - ٦ ( ج ) . وفي الشكل ٨ - ٨ رسم تيار دائرة  $RLC$  كدالة في  $\omega$  أو كدالة في  $f$  وذلك مع تغيير مناسب في المحور الأفقي . وعند  $\omega_0$  يسجل التيار  $I_0$  إلى قيمته العظمى . وقد وضع في الرسم النقطة التي يكون عندها التيار مساوياً 0.707 من قيمته العظمى ، والتذبذبات المقابلة هي  $\omega_1$  و  $\omega_2$  .



شكل ٨ - أ

وبما أن القدرة الممتصة المأخرة هي  $I^2 R$  ، فعند  $I = 0.707 I_0$  تكون القدرة نصف قيمتها العظمى الناتجة عند  $\omega_0$  ونسعى التعطافان المتقابلتان لـ  $\omega_2$  و  $\omega_1$  ينطبق نصف القدرة ونسعى المسافة بين هاتين النقطتين مقدرة بوحيدات hertz بإتساع الحيز  $BW$  .

والآن يمكن التعبير عن عامل الجودة بالنسبة بين ذبلة الرنين إلى اتساع الحيز ، إذن (أنظر المسألة ٨ - ١٢) .

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{BW}$$

وذبلة الرنين  $\omega_0$  هي المتوسط الهندسي للذببتين ،  $\omega_2$  و  $\omega_1$  (أنظر المسألة ٨ - ١٦)

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$



شكل ٨ - ب

نعتبر دائرة التوازي المكونة من الأفرع الثلاثة والموضحة في الشكل ٨ - ب عند الرنين كمية ثابتة من الطاقة . وذلك لأنه إذا كان تيار الملف نهاية عظمى يكون جهد المكثف مساوياً لصفر والعكس بالعكس

$$\frac{1}{2} L i_{max}^2 = \frac{1}{2} C V_{max}^2 \quad \text{أي أن}$$

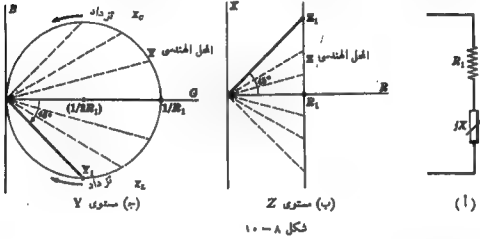
$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R \quad \text{إذن}$$



### الشكل المحل الهندسي :

يمكن تحليل التواثر ذات العنصر الواحد باستخدام أشكال المحل الهندسي لمساحة الدائرة ، وحيث أن  $V = I = VY$  ، ثابت ، فإن المحل الهندسي للكمية  $Y$  يمثل تغير  $I$  مع تغير العنصر المتغير .

تتكون دائرة التواثر الموضحة في الشكل ٨ - ١٠ ( أ ) من مقاومة ثابتة وممانعة متغيرة يمكن أن تأخذ قيم موجبة أو سالبة . وإذا اعتبرنا أن مستوى  $Z$  يتكون من مجموعة الإحداثيات الكرتيزية  $R$  ،  $X$  ، فإن المحل الهندسي للمقاومة  $Z$  للدائرة المطاة هو خط مستقيم يوازي المحور  $X$  ويقطع المحور  $R$  عند  $R_1$  ، كما هو موضح في الشكل ٨ - ١٠ ( ب )



ويمكننا تعيين المحل الهندسي لمساحة الدائرة المطاة  $Y$  في مستوى  $Y$  المكون من مجموعة الإحداثيات الكرتيزية  $B$  ،  $G$  .

$$Z = 1/Y$$

$$(1) \quad R_1 + jX = \frac{1}{G + jB}$$

وبعجزه المعادلة ( ١ ) على شكل كسور ومساواة الأجزاء الحقيقية نجد أن

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$(2) \quad G^2 - G/R_1 + B^2 = 0 \quad \text{أو}$$

وباضافة  $1/4R_1^2$  لكلا طرفي المعادلة ( ٢ ) ثم تبسيطها نجد أن

$$(3) \quad \left(G - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{1}{2R_1}\right)^2$$

وبمقارنة الصيغة التيمية لمعادلة دائرة في الممنعة التمثيلية  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$  بالمعادلة ( ٣ ) ، نلاحظ

أن المحل الهندسي للمستوى الكمية  $Y$  هو دائرة مركزها عند  $(1/2R_1, 0)$  ، ونصف قطرها  $1/2R_1$  .

كما هو موضح في الشكل ٨ - ١٠ ( ج ) .

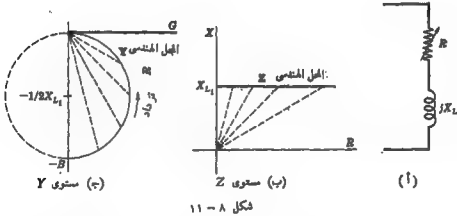
ويتقابل كل نقطة في المحل المنتمي للمقاومة  $Z$  نقطة في المحل المنتمي للمساحة  $Y$  . ويتقابل كل نقطة في المحل المنتمي لـ  $Z$  فوق المحور  $R$  نقطة على نصف الدائرة تحت المحور  $G$  في مستوى  $Y$  . وأيضاً  $\infty$  على المحل المنتمي لـ  $Z$  تتقابل نقطة الأصل في مستوى  $Y$  . وبالتالي فإن أي نقطة تحت المحور  $R$  في المحل المنتمي لـ  $Z$  يقابلها نقطة على النصف دائرة فوق المحور  $G$  في مستوى  $Y$  . و  $\infty$  على المحل المنتمي لـ  $Z$  تتقابل نقطة الأصل في المستوى  $Y$  . وبملاحظة المواقع النسبية لـ  $Z_1$  و  $Y_1$  فإن بعض  $Z_1$  و  $Y_1$  من نقطة الأصل المتقابلة مختلفان ببنيان تتساوى الزوايا على المحور الأفقي ولكن بإشارة مختلفة .

بتطبيق الممانعة الحثية وتغيير المقاومة كما هو في الشكل ٨ - ١١ ( أ ) يكون المحل المنتمي للمقاومة  $Z$  عبارة عن خط مستقيم في الربع الأول لمستوى  $Z$  عند  $X$  تساوي  $X_{L_1}$  . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل المنتمي لـ  $Y$  هي

$$(4) \quad G^2 + (B - 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2$$

وبمقارنة المعادلة (٤) بالصيغة القياسية لمعادلة دائرة ، نجد أن المحل المنتمي لـ  $Y$  هو دائرة مركزها عند  $(0, -1/2 X_{L_1})$  ونصف قطرها  $1/2 X_{L_1}$  في مستوى  $Y$  . انظر الشكل ٨ - ١١ ( ج ) .

وبحث أن المحل المنتمي لـ  $Z$  في الشكل ٨ - ١١ (ب) يتكون من خط مستقيم في الربع الأول في المستوى  $Z$  فإن نصف الدائرة الواقعة في الربع الرابع في مستوى  $Y$  هو فقط تحويل المحل المنتمي لـ  $Z$  لهذه الدائرة .

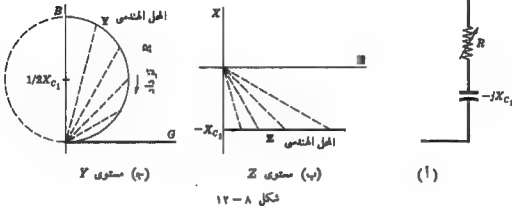


شكل ٨ - ١١

عند توصيل ممانعة سعوية على التوالي مع مقاومة متغيرة ، كما في الشكل ٨ - ١٢ ( أ ) فإن المحل المنتمي لـ  $Z$  يكون خطاً أفقياً في الربع الرابع في مستوى  $Z$  عند  $X = -X_{C_1}$  . انظر الشكل ٨ - ١٢ ( ب ) . وباستخدام نفس الطريقة السابقة تكون معادلة المحل المنتمي لـ  $Y$  هي .

$$(5) \quad G^2 + (B + 1/2X_{C_1})^2 = (1/2X_{C_1})^2$$

وبمقارنة المادة (٥) بالصيغة القياسية لمادة دائرة ، نرى أن الحل الهندسي لـ  $Y$  عبارة عن نصف دائرة مركزها عند  $(0 \text{ و } 1/2X_{C1})$  ونصف قطرها  $1/2X_{C1}$  في الربع الرابع لمستوى  $Y$  . أنظر الشكل ١٢-٨ (ج) .

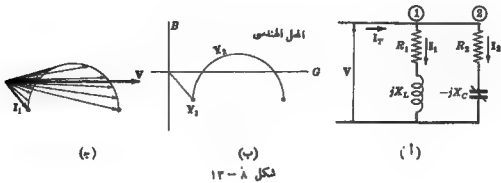


### شكل الحل الهندسي للتقار :

أعتبر دائرة التوازي الموصلة في الشكل ١٢-٨ (١) والتي تتكون من مقاومة ثابتة  $R_1$  متصلة على التوالي مع ممانعة ثابتة  $jX_L$  في الفرع الأول ومقاومة ثابتة  $R_2$  متصلة على التوالي مع ممانعة متغيرة  $-jX_C$  في الفرع الثاني . وتكون المساحة الكلية للفرعين المتصلين على التوازي هي

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

في الشكل ١٢-٨ (ب) بإضافة الحل الهندسي للفرع الثاني  $Y_2$  إلى النقطة الثابتة  $Y_1$  نحصل على الحل الهندسي  $Y_T$  .



ومع أن التيار يعطى بـ  $I = VY$  فإن الشكل ٨-١٢ (ج) يبين أنه بإضافة التيار الثابت  $I_0$  إلى القيم المختلفة للتيار  $I_0$  ينتج لدينا المحل الممتنى للتيار الكلي . و يوضح الشكل أيضا كيف أنه توجد قيمتان لـ  $C$  يكون عندهما التيار الكلي في نفس الاتجاه  $V$  .

وبإعادة اختبار الشكل ٨-١٣ (ج) يتضح أنه تحت ظروف معينة فإنه من المحتمل ألا نجد قيمة لـ  $C$  يحدث عندها الرنين . لذا نفس نصف قطر دائرة المحل الممتنى بطريقة ما بحيث لا يتقاطع المنحنى مع المحور  $V$  فإنه لا توجد قيمة لـ  $C$  يحدث عندها رنين . وفي المسائل التالية اختبارات لتطبيقات لأشكال المحل الممتنى .

### مسائل محولة

٨-١ في دائرة  $RLC$  على التوالي  $L = 5 \text{ mH}$  ،  $C = 12.5 \mu\text{F}$  ،  $R = 10 \Omega$  ارسم نمشة زاوية المعاوقة كدالة في  $\omega$  مع تغيير  $\omega$  من  $0.8\omega_0$  إلى  $1.2\omega_0$  .

نمشة عند الرنين

$$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{(5 \times 10^{-3})(12.5 \times 10^{-6})} = 4000 \text{ rad/s}$$

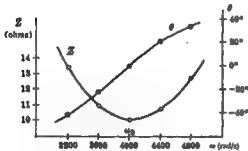
$$X_{L0} = \omega_0 L = 4000(5 \times 10^{-3}) = 20 \text{ ohms}$$

$$X_{C0} = 1/\omega_0 C = 1/(4000 \times 12.5 \times 10^{-6}) = 20 \text{ ohms}$$

$$Z_0 = R + j(X_{L0} - X_{C0}) = 10 + j(20 - 20) = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms} \quad \text{لذا}$$

وبما أن  $X_C = 1/\omega C$  ،  $X_L = \omega L$  ، إذن  $X_L/X_{L0} = \omega/\omega_0$  و  $X_C/X_{C0} = \omega_0/\omega$  . وحل ذلك فإنه يمكن حساب قيم  $Z$  و  $X_C$  و  $X_L$  عند ذبذبات أخرى .

وفي الشكل ٨-١٤ (أ) دوفت قيم للمعاومات والمعاوقات ، و يوضح الشكل ٨-١٤ (ب) الرسم المطلوب .



(ب)

$\omega$ (rad/s)	$X_L$ ( $\Omega$ )	$X_C$ ( $\Omega$ )	$Z$ ( $\Omega$ )
3200	16	25	$10 - j9$ $13.4 / -42^\circ$
3600	18	22.2	$10 - j4.2$ $10.8 / -22.8^\circ$
4000	20	20	$10$ $10 / 0^\circ$
4400	22	18.2	$10 + j3.8$ $10.7 / 20.8^\circ$
4800	24	16.7	$10 + j7.3$ $12.4 / 36.2^\circ$

(أ)

٧-٨ إذا أثر جهد  $V = 100 \angle 0^\circ$  على دائرة التوازي الموصلة في المسألة ١-٨. فأوجد الجهد عبر كل عنصر عندما  $\omega = 3600$  و  $4000$  و  $4400$  rad/s. ارسم شكل الجهد المطاوع عند كل ذبذبة.

عند  $\omega = 3600$  rad/s فإن  $I = V/Z = (100 \angle 0^\circ) / (10 \angle 8^\circ \angle 22.8^\circ) = 9.26 \angle 22.8^\circ$  A إذن

$$V_R = 9.26 \angle 22.8^\circ (10) = 92.6 \angle 22.8^\circ \text{ V}, V_L = 9.26 \angle 22.8^\circ (18 \angle 90^\circ) = 167 \angle 112.8^\circ \text{ V}, V_C = 206 \angle -67.2^\circ \text{ V}$$

عند  $\omega = 4000$  rad/s فإن  $I = (100 \angle 0^\circ) / (10 \angle 0^\circ) = 10 \angle 0^\circ$  A إذن

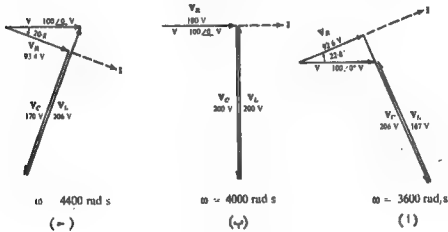
$$V_R = 100 \angle 0^\circ \text{ V}, V_L = 10 \angle 0^\circ (20 \angle 90^\circ) = 200 \angle 90^\circ \text{ V}, V_C = 300 \angle -90^\circ \text{ V}$$

وعند  $\omega = 4400$  rad/s فإن  $I = (100 \angle 0^\circ) / (10 \angle 7^\circ \angle 20.8^\circ) = 9.34 \angle -20.8^\circ$  A إذن

$$V_R = 9.34 \angle -20.8^\circ (10) = 93.4 \angle -20.8^\circ \text{ V}, V_L = 9.34 \angle -20.8^\circ (22 \angle 90^\circ) = 206 \angle 69.2^\circ \text{ V},$$

$$V_C = 170 \angle -110.8^\circ \text{ V}$$

وبشرح الشكل ٨-١٥ أشكال الجهود الثلاثة المطاوعة. لاحظ أنه بالقرب من التردد فإن قيمة الجهد عبر كل عنصر يمانع في دائرة التوازي تزيد من قيمة الجهد المطاوع.



شكل ٨-١٥

٧-٨ دائرة توازي تتكون من  $R = 5 \Omega$  و سعة متغيرة  $C$ ، فإذا أثرنا عليها جهد ذبذبة  $f = 1000$  Hz. فأوجد قيمة  $C$  عند التردد.

بما أنه عند التردد تكون الممانعات متساوية أي أن  $2\pi fL = 1/2\pi fC$  إذن

$$C = \frac{1}{L(2\pi f)^2} = \frac{1}{(20 \times 10^{-3})(2\pi \times 1000)^2} = 1.27 \mu\text{F}$$

٤ - أ دائرة توال تتكون من  $C = 20 \mu F$  و  $R = 5 \text{ ohms}$  وحث متغير  $L$  ، يؤثر عليها جهد  $V = 10/\sqrt{2} \text{ V}$  بذبذبة قدرها  $1000 \text{ rad/s}$  فإذا ضبطت قيمة  $L$  بحيث يصل الجهد عبر المقاومة إلى قيمته العظمى فأوجد الجهد عبر كل عنصر .

بما أن  $V_R = IR$  فإن الجهد عبر المقاومة يصل إلى قيمته العظمى عند الرنين أي عندما يصل التيار إلى قيمته العظمى . وحيث أنه تتساوى الممانعات عند الرنين إذن .

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000(20 \times 10^{-6})} = 50 \text{ ohms}, X_L = 50 \text{ ohms}$$

$$\text{إذن } I = V/Z = (10/\sqrt{2})/(5/\sqrt{2}) = 2/\sqrt{2} \text{ A} \quad \text{وحيث أن } Z = R = 5/\sqrt{2} \Omega'$$

$$V_C = 100 \angle -90^\circ \text{ V} \quad \text{و } V_R = 2/\sqrt{2} \angle 0^\circ = 10/\sqrt{2} \text{ V}, V_L = (2/\sqrt{2})(50 \angle 90^\circ) = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$$

٥ - أ إذا أعطيت دائرة  $RLC$  على التوالي فيها  $C = 40 \mu F$  و  $L = 0.5 \text{ H}$  و  $R = 100 \Omega$  ، فاحسب ذبذبة الرنين وكذلك ذبذبة إشباع التردد  $\omega_2$  و  $\omega_1$  (ذبذبتان منتصف القدرة)

$$f_0 = \omega_0/2\pi = 35.7 \text{ Hz}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.5(40 \times 10^{-6})} = 224 \text{ rad/s}$$

عند ذبذبة منتصف القدرة العنصرى  $\omega_1$  ، تزداد الممانعة السعوية عن الممانعة الحثية ويكون التيار مساوياً لـ  $0.707$  من قيمته العظمى . وبما أن  $I = V/Z$  إذن  $|Z|$  يساوى  $1.414$  مرة من قيمته عند  $\omega_0$  . وبما أن  $Z = 100 \Omega$  عند  $\omega_0$  إذن  $|Z| = 141.4 \text{ ohms}$  عند  $\omega_1$  . وحيث أن

$$\text{إذن } \theta = -45^\circ \quad \text{و } \cos \theta = R/Z = 100/141.4 = 0.707 \quad \text{و } Z = 100 - j(X_C - X_L) = 141.4/\theta$$

$$(١) \quad 1/\omega_1 C - \omega_1 L = R \quad \text{أو} \quad X_C - X_L = R$$

وبالتعويض في المعادلة (١) بالقيم المطابقة وحلها للحصول على  $\omega_1$  نجد أن  $\omega_1 = 145 \text{ rad/s}$  و  $f_1 = 145/2\pi = 23.1 \text{ Hz}$

عند ذبذبة منتصف القدرة  $\omega_2$  ، تزداد الممانعة الحثية عن الممانعة السعوية وتكون  $|Z|$  تساوى أيضاً  $141.4 \Omega$  و  $\theta = +45^\circ$  إذن

$$(٢) \quad \omega_2 L - 1/\omega_2 C = R \quad \text{أو} \quad X_L - X_C = R$$

وبالتعويض في المعادلة (٢) وحلها للحصول على  $\omega_2$  نجد أن  $\omega_2 = 345 \text{ rad/s}$  و  $f_2 = 55 \text{ Hz}$

وحيث أن  $\omega_0$  هي المتوسط الهندسي للترددتين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  إذن

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{145 \times 345} = 224 \text{ rad/s}$$

٨- بين أن خذبة الرنين  $\omega_0$  لدائرة  $RLC$  على التوالي هي المتوسط الهندسي لـ  $\omega_1$  و  $\omega_2$  أي المتوسط الهندسي للحد الأدنى والأعلى للذبذبة منتصف القدرة على الترتيب .

من المسألة ٨- نجد أنه عند  $\omega_1, \omega_2$  :  $\omega_1 L = R$  و  $1/\omega_2 C = R$  وعند  $\omega_0$  :  $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$  إذن

$$(1) \quad \begin{aligned} \omega_1 \omega_2 C - \omega_1 L &= \omega_2 L - 1/\omega_2 C \\ \text{بضرب المعادلة (1) في } C \text{ والتعويض عن } C &= 1/\omega_0 L \text{ نجد أن} \\ 1/\omega_1 + 1/\omega_2 &= (\omega_1 + \omega_2)/\omega_0^2 \quad \text{أو} \quad 1/\omega_1 - \omega_1/\omega_0^2 = 1/\omega_2 - \omega_2/\omega_0^2 \end{aligned}$$

ومنها نجد أن  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  .

٨- دائرة توالي فيها  $C = 20 \mu F$  و  $L = 0.05 H$  و  $R = 50 \Omega$  ، يؤثر عليها جهد  $V = 100 \angle 0^\circ V$  بذبذبة متغيرة . أوجد أقصى جهد على الملف مع تغير الذبذبة .

إن قيمة المحاورة كدالة في  $\omega$  هي  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  ، إذن قيمة التيار هي  $I = V/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  . قيمة الجهد عبر  $L$  هي

$$(1) \quad V_L = \omega L I = \omega L V / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

وبوضع المشتقة  $dV_L/d\omega$  في المعادلة (1) مساوية الصفر ثم بإخاط الحصول على  $\omega$  ، نحصل على قيمة  $\omega$  عندما يصل  $V_L$  إلى نهايته العظمى .

$$(2) \quad \frac{dV_L}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \omega L V \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2}^{-1/2} \right) = \frac{\omega L V \frac{1}{2} (R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2)^{-3/2} (2\omega L - 2/\omega^3 C)}{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2}$$

وبتجزئ ،  $L \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 - 2L/C + 1/\omega^2 C^2}^{-1/2}$  في المعادلة (2) مع وضع البسط مساوياً للصفر نجد أن

$$(3) \quad \begin{aligned} R^2 - 2L/C + 2/\omega^2 C^2 &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2}{2 - R^2 C/L}} \end{aligned}$$

ومنها نجد أن

وبحيث أن  $Q_0 = L/\omega_0 R$  و  $\omega_0 L/R = 1/\omega_0 C R$  ،  $Q_0^2 = L/R^2 C$  نجد أن

$$(4) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{2Q_0^2}{2Q_0^2 - 1}}$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) ياتقيم المسألة نجد أن

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2(-0.6)(20 \times 10^{-9}) - (50 \times 20 \times 10^{-9})^2}} = 1414 \text{ rad/s}$$

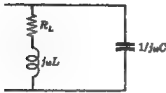
وبما أن  $X_L = \omega L = 1414(0.05) = 70.7 \text{ ohms}$  و  $X_C = 1/(\omega C) = 1/(1414 \times 20 \times 10^{-9}) = 35.4 \text{ ohms}$

و  $Z = R + jX_L - jX_C = 50 + j(70.7 - 35.4) = 50 + j35.3 \Omega$  و  $I = V/Z = 100/61.2 = 1.635 \text{ A}$  إذن  $I = 1.635 \text{ A}$

و  $V_{L(max)} = I \times X_L = 1.635(70.7) = 115.5 \text{ V}$

توضيح المعادلة (٤) أنه عندما تكون قيمة  $Q$  كبيرة فإن أكبر قيمة للجهد عبر  $L$  تكون عند  $\omega_0 \approx 1/\sqrt{LC}$ . وإذا كانت  $Q$  كبيرة فإننا نحصل أيضاً على أكبر قيمة للجهد عبر كل من  $R$  و  $C$  عند  $\omega_0$ . وعندما تكون  $Q$  صغيرة فإن أكبر قيمة لـ  $V_C$  تحدث عند  $\omega$  أقل من  $\omega_0$  بينما أكبر قيمة لـ  $V_L$  تحدث عند  $\omega$  أكبر من  $\omega_0$ . انظر المسألة ٨-٢٨.

٨- الشكل ١٦-٨ يوضح دائرة قوازي يتصل فيها مكثف مع ملف بحيث  $R_L$  هي مقاومة الملف. أوجد ذبذبة الرنين لهذه الدائرة.



شكل ١٦-٨

مساحة الدائرة الكلية هي

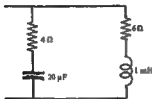
$$Z_T = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

وعند الرنين يكون الجزء التخيلي مساوياً للصفر أو

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \quad \text{ومنها} \quad \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C$$

وإذا كانت مقاومة الملف صغيرة بالمقارنة بـ  $\omega_0 L$  فإن ذبذبة الرنين تعطى بـ  $1/\sqrt{LC}$ .



شكل ١٧-٨

٩- أوجد ذبذبة الرنين  $\omega_0$  لدائرة التوازي المكونة من فرعين والموضحة في الشكل ١٧-٨. إذا زادت قيمة المقاومة في الفرع  $RC$  فما هي أكبر قيمة لها نجد عند ذبذبة رنين؟

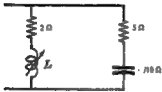


$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{B_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-8} \times 20 \times 10^{-4}}} \sqrt{\frac{8^2 - 10^{-9}/(20 \times 10^{-9})}{4^2 - 10^{-9}/(20 \times 10^{-9})}} \\ &= 4540 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

إن قيمة وسط المقار الجبرى هي  $14 - 30 = -36$  . إذن يكون المقار الجبرى جبر حقيقى إذا كان المقام سالباً أى أنه إذا كان  $L/C < R_C^2$  أو  $R_C < 7.07 \Omega$  وعندها تقترب قيمة  $R_C$  من  $7.07 \Omega$  فإن التذبذب  $\omega_0$  تقترب من ما لا نهاية .

إذا زادت قيمة  $R_L$  فإن  $\omega_0$  تقترب من الصفر عندما تقترب  $R_L$  من  $7.07 \Omega$  .

٨-١٠ أوجد قيمة  $L$  التى تكون متداً الدائرة الموضحة فى الشكل ٨-١٨ فى حالة  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  ولين عند التذبذب



شكل ٨-١٨

المساحة الكلية للدائرة جـ

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10} \text{ siemens} \\ &= \left( \frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{185} \right) + j \left( \frac{10}{185} - \frac{X_L}{4 + X_L^2} \right)\end{aligned}$$

وبوضع الجزء التخيلى مساوياً للصفر نجد أن

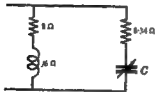
$$10/125 = X_L/(4 + X_L^2) \text{ أو } X_L^2 - 12.5X_L + 4 = 0 \quad (1)$$

وحلنا المعادلة (١) هما  $X_L = 0.33 \Omega$  و  $X_L = 12.17 \Omega$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة  $X_L = \omega L$  نجد أن شرط ولين الدائرة هو  $L = 2.43 \text{ mH}$  أو  $0.066 \text{ mH}$  .

١-١١ أوجد قيمة  $C$  التى يحدث متداً ولين فى الدائرة الموضحة فى

الشكل ٨-١٩ عندما  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$



شكل ٨-١٩

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{2 + j6} + \frac{1}{5 - j10} \text{ siemens} \\ &= \left( \frac{2}{69.6 + X_C^2} + \frac{5}{69.6 + X_C^2} \right) + j \left( \frac{X_C}{69.6 + X_C^2} - \frac{6}{100} \right)\end{aligned}$$

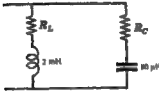
عند الرنين تكون المسامحة المركبة عدداً حقيقياً . إذن

$$X_C(69.5 + X_C) = 6/100 \quad \text{و} \quad X_C^2 - 16.7X_C + 69.5 = 0$$

ومنها نجد أن  $X_C = 8.35 \Omega$  وبالتوسيط عن هذه القيمة في  $X_C = 1/\omega C$  وحلها ، نجد أن  $C = 24 \mu F$  .

١٢-٨ بين قيم  $R_L$  و  $R_C$  التى تجعل الدائرة الموضحة في الشكل ٨-٢٠ في حالة رنين عند كل الترددات .

الدائرة في حالة رنين عند ذبذبة



شكل ٨-٢٠

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - L/C}{R_C^2 - L/C}}$$

إذن  $\omega_0$  تأخذ أى قيمة إذا كان  $R_L^2 \cdot L/C = R_C^2 \cdot L/C$  . إذا كان  $L/C = (2 \times 10^{-6})/(80 \times 10^{-12})$  .

$$R_L^2 = R_C^2 \cdot \sqrt{25} \quad 5 \text{ ohms}$$

يترك لطلاب اختبار هذه النتيجة عند قيم  $\omega = 2500 \text{ rad/s}$  و  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$

١٢-٨ بين أن  $Q_0 = \omega_0 L/R = f_0/BW$  لدائرة  $RLC$  على التوالي .

عند ذبذبات منتصف القدرة تكون محصلة الممانعة مساوية لمقاومة .

وعند ذبذبة منتصف القدرة الصغرى تكون الممانعة السوية أكبر من الممانعة الخفية . إذن

$$f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad 1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$$

وعند ذبذبة منتصف القدرة الكبرى تكون الممانعة الخفية أكبر من الممانعة السوية إذن

$$f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{4\pi L} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad 2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$$

وبما أن  $BW = f_2 - f_1$  ,  $BW = R/2\pi L$  . إذن

$$Q_0 = f_0/BW = 2\pi f_0 L/R = \omega_0 L/R$$

٨-١٤ احسب  $Q_0$  لدائرة التوالي التي فيها  $R = 20 \Omega$  و  $L = 0.05 \text{ H}$  و  $C = 1 \mu\text{F}$  وذلك باستخدام الصيغ الثلاثة المكافئة لـ  $Q_0$  :  $\omega_0 L/R$  و  $1/\omega_0 CR$  و  $f_0/BW$ .

ذاتية الرنين هي  $4470 \text{ rad/s}$  و  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{0.05 \times 10^{-6}} = 4470 \text{ rad/s}$  و  $f_0 = \omega_0/2\pi = 712 \text{ Hz}$  إذن

$$Q_0 = \omega_0 L/R = 4470(0.05)/20 = 11.2$$

$$Q_0 = 1/\omega_0 CR = 1/(4470 \times 10^{-6} \times 20) = 11.2 \quad \text{أو}$$

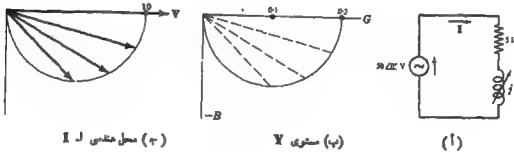
من المسألة ٨-١٣ نجد عند الذاتية الصغرى لمتوسط القدرة أن  $1/2\pi f_1 C - 2\pi f_1 L = R$  وبالتفويض

$$f_1 = 681 \text{ Hz} \quad \text{و} \quad 1/(2\pi f_1 \times 10^{-6}) - 2\pi f_1(0.05) = 20$$

وعند الذاتية الكبرى لمتوسط القدرة نجد أن  $2\pi f_2 L - 1/2\pi f_2 C = R$  . وبالتفويض نجد أن  $f_2 = 745 \text{ Hz}$

$$\text{إذن} \quad BW = (745 - 681) \text{ Hz} \quad \text{و} \quad Q_0 = f_0/BW = 712/(745 - 681) = 11.1$$

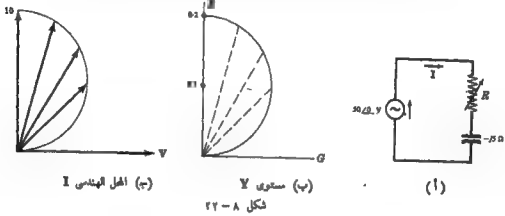
٨-١٥ أوجد المحل المتناسق للتيار في الدائرة المبينة في الشكل ٨-٢١ (أ) والتي فيها بمانعة حثية متغيرة  $X_L$ .  
المحل المتناسق لـ  $Y$  هو نصف دائرة نصف قطرها  $r = 1/2R = 0.1$  كما هو موضح في الشكل ٨-٢١ (ب)



شكل ٨-٢١

وحيث أن المحل المتناسق للتيار يوجد من العلاقة  $Y = VY$  حيث  $V = 50/0^\circ \text{ V}$  إذن المحل المتناسق للتيار مشابه للمحل المتناسق لـ  $Y$  وله قيمة عظمى تساوي  $10 \text{ A}$  عندما  $X_L = 0$ . أنظر الشكل ٨-٢١ (ج)

١٦-٨ أوجد المحل المتناسبي للتيار في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٢-٨ (١) والتي فيها مقاومة متغيرة  $R$  وعازمة سعوية ثابتة .  
المحل المتناسبي لـ  $Y$  هو نصف دائرة نصف قطرها  $r = 1/2X_C = 0.1$  كما هو موضح في الشكل ٢٢-٨ (ب).



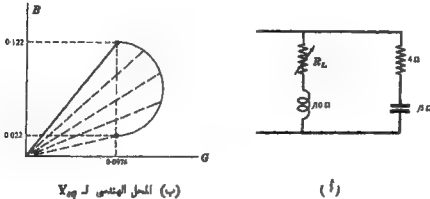
وحيث أن المحل المتناسبي للتيار  $I$  يوجد من المعادلة  $I = VY$  حيث  $V = 50 \angle 0^\circ$  إذن يصل التيار إلى قيمته العظمى  $10 \text{ A}$  عندما  $R = 0$  . أنظر الشكل ٢٢-٨ (ج) .

١٧-٨ أوجد قيمة  $R_E$  التي تجعل الدائرة الموضحة في الشكل ٢٢-٨ (١) في حالة رنين . ارسم المحل المتناسبي لـ  $Y$  . ثم  
فسر النتائج التي تحصل عليها .

المساحة الكلية للدائرة هي

$$Y_T = \frac{1}{R_E + j10} + \frac{1}{4 - j5} = \left( \frac{R_E}{R_E^2 + 100} + \frac{4}{41} \right) + j \left( \frac{5}{41} - \frac{10}{R_E^2 + 100} \right) \text{ siemens}$$

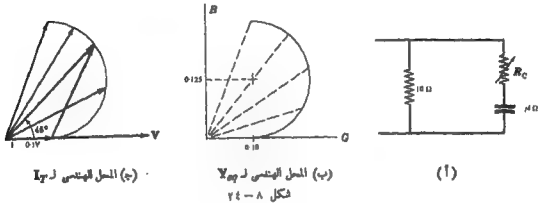
وحيث أنه عند الرنين يكون الجزء التخيلي لـ  $Y$  مساوياً للصفر أى أن  $5/41 - 10/(R_E^2 + 100) = 0$  ومنها نجد أن  $R_E^2 = 18$  . أى أنه لا توجد قيمة لـ  $R_E$  تجعل الدائرة في حالة رنين .



إن المساحة للفرع ذي العناصر الثابتة هي  $0.0976 + j0.122 S$  ،  $1/4 - j5 = 0.0976 + j0.122 S$  ، المحل الهندسي لمساحة الفرع ذي العناصر المتغيرة هو نصف دائرة نصف قطرها  $r = 1/20 = 0.05$  أي أن القطر يساوي  $0.10$  . وبما أن الموصلة السعوية للفرع ذي العناصر الثابتة تساوي  $0.122 S$  فإن المحل الهندسي للفرع ذي العناصر المتغيرة لا يقطع المحور الحقيقي . وبذلك لا يمكن أن يحدث رنين .

١٨ - أوجد المحل الهندسي لتيار الدائرة الموضحة في الشكل ٨-٢٤ (أ) ثم أوجد قيمة  $R_C$  التي تجعل زاوية الطور بين  $V$  و  $I$  تساوي  $45^\circ$  .

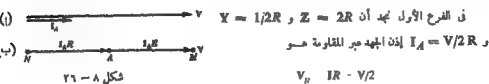
إن مساحة القرى ذي العناصر الثابتة هي  $1/R = 0.1 S$  . والمحل الهندسي للنصف دائرة للفرع  $RC$  نصف قطره  $r = 1/8 = 0.125$  . أنظر الشكل ٨-٢٤ (ب) .



من الشكل ٨-٢٤ (ج) نجد أن التيار سابق للجهد بزاوية  $45^\circ$  عند النقطة الموضحة . ومن هذا ينتج أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لـ  $Y$  متساويان . وإذا كان

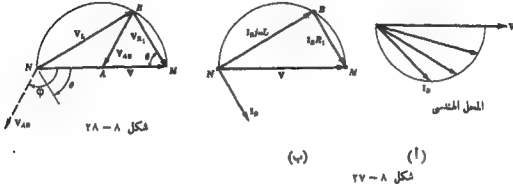
$$R_C = 2 \text{ ohms} \quad \text{و} \quad 0.1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16} = \frac{4}{R_C^2 + 16} \quad \text{إذن} \quad Y_r = \left(0.1 + \frac{R_C}{R_C^2 + 16}\right) + j \left(\frac{4}{R_C^2 + 16}\right) \text{ siemens}$$

١٩ - أوجد قيمة المقاومة الموضحة في الشكل ٨-٢٥ في المسألة ١٨ - أوجد أن القيمة المطلوبة  $V_{AB}$  ثابتة . أي أن  $V_{AB} = \frac{1}{2}V$  . والجهد المطاوع  $V_{AB}$  لائق لجهد المصدر  $V$  بزاوية  $2\theta$  حيث  $\theta = \tan^{-1} \omega L/R$  . وضع هذه النتائج فيما يلي .



الشكل ٨-٢٦ يوضح الشكل المطاوع للجهدين  $V_{MA}$  و  $V_{AN}$  حيث  $A$  منتصف  $V$  .

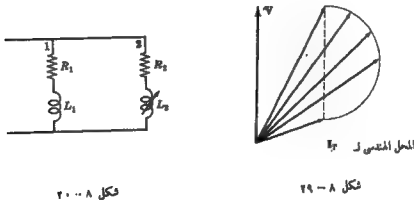
حيث أن المحل المتناسق لمساحة الفرع الثاني  $\mathcal{V}$  نصف دائرة ، إذن المحل المتناسق للتيار هو أيضا نصف دائرة كما هو موضح في الشكل ٢٧-٨ (١) . ويتكون شكل الجهد المطاوع من الجهد عبر الحث  $V_{BN}$  والجهد عبر  $V_{MB}$  ، وبإضافة الجهدين ينتج الجهد  $V$  . لاحظ أن  $I_B$  لاسق لـ  $V_{BN}$  بزاوية  $90^\circ$  .



الجهدان  $V_{MB}$  و  $V_{BN}$  متعامدان لجميع قيم  $L$  . وعندما تتغير  $L$  من صفر إلى  $\infty$  تتحرك  $B$  من  $M$  إلى  $N$  على المحل المتناسق النصف دائري .

والآن بتركيب الجهدين المطاوعين في الشكلين ٢٦-٨ (ب) ، ٢٧-٨ (ب) ، كان في الشكل ٢٨-٨ نرى أن  $V_{AB}$  هو نصف قطر النصف دائرة ويساوي  $V/2$  أي أنه ثابت القيمة . وعلاوة على ذلك فإن  $V_{AB}$  لاسق لجهد بزاوية  $\phi$  تساوي  $2\theta$  حيث  $\theta = \tan^{-1} R/\omega L$

٢٨-٨ الشكل ٢٩-٨ يوضح المحل المتناسق للتيار الكلي لدائرة توازي مكونة من فرعين ، حين عناصر كل فرع ووضوح أي العناصر يمكن تغييره .



شكل ٢٨-٢٩

شكل ٢٩-٢٨

النقطة في قاع النصف دائرة تقابل الشرط الذي منه يكون تيار الفرع ذي العناصر المتغيرة مساوياً للصفر. وعلى ذلك فإن التيار الكلي عند نفس النقطة ينتج من تيار الفرع 1 ذي العناصر الثابتة. وحيث أن هذا التيار لاسق للجهود إذن الفرع الثابت لابد أن يحتوي على  $R_2$  و  $Z_2$ .

الحل المختص النصف دائري تيار الفرع 2 بين أن التيار في اتجاه الجهد عند قيمة المتغير. وعند جميع النقاط الأخرى في الحلق المختص يكون ولا لاسق لـ  $V$ . إذن الفرع 2 يتكون من  $R_2$  و  $Z_2$  بحث متغير كما هو موضح في الشكل ٨-٣٠.

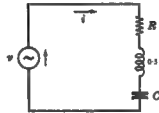
### مسائل التمرين

٨-٣١ في دائرة التوالي  $RLC$  الموضحة في الشكل ٨-٣١ إذا كانت الجهد والتيار القليلين يمثلان بالمادتين  $v = 70.7 \sin(500t + 30^\circ)$  volts و  $i = 2.83 \sin(500t - 30^\circ)$  amperes ، فأوجد  $R$  و  $C$ .

الجواب :  $R = 25 \Omega$  و  $C = 8 \mu F$



شكل ٨-٣٢.



شكل ٨-٣١

٨-٣٢ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٨-٣٢ إذا كانت المقاومة للمصدر هي  $3 + j5 \Omega$  وذبلية المصدر هي  $2000 \text{ Hz}$  ، فحدد أي قيمة لـ  $C$  تصل القدرة في المقاومة  $10 \Omega$  إلى قيمتها العظمى ؟

الجواب :  $C = 26.6 \mu F, P = 111 \text{ W}$

٨-٣٣ في دائرة توالي  $RLC$  فيها  $L = 25 \text{ mH}$  و  $C = 75 \mu F$  كانت زاوية الطور لها لاسقة وتساوى  $25^\circ$  عند  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$ . عند أي ذبلية تكون زاوية الطور سابقة وتساوى  $25^\circ$  ؟ أوجد أيضاً  $\omega_0$ .

الجواب :  $\omega_0 = 730 \text{ rad/s}, \omega = 267 \text{ rad/s}$

٨-٣٤ إذا كانت الجهد العظمى لدائرة التوالي  $RLC$  والتي فيها  $L = 0.5 \text{ H}$  هو  $v = 70.7 \sin(500t + 30^\circ)$  volts والتيار العظمى هو  $i = 1.5 \sin(500t)$  amperes. فأوجد قيمة  $R$  و  $C$ . عند أي ذبلية  $\omega_0$  تكون

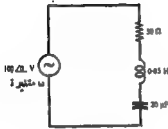
الطاقة في حالة زلين ؟ الجواب :  $\omega_0 = 476 \text{ rad/s}, C = 8.83 \mu F, R = 40.8 \text{ ohms}$

٢٥- أ دائرة: تتوالى فيها  $R = 10 \Omega$  و  $L = 0.2 H$  و  $C = 40 \mu F$  يؤثر عليها جهد ذبذبة متغيرة ، أوجد التجهيزات  $I_1$  و  $I_0$  و  $I_2$  و  $I_3$  التي يكون عندها التيار : سابق الجهد بزاوية  $30^\circ$  ، في اتجاه الجهد ، لاحق الجهد بزاوية  $30^\circ$  على التوالي .  
الجواب :  $I_1 = 54.0 Hz, I_0 = 56.3 Hz, I_2 = 58.6 Hz$  .

٢٦- أ دائرة  $RLC$  على التوالي فيها  $R = 25 \Omega$  و  $L = 0.6 H$  زاوية الطور لمساوية وتساوى  $60^\circ$  عند ذبذبة تساوى  $40 Hz$  . أوجد الذبذبة التي تكون عندها الفائرة في حالة رنين .

الجواب :  $f_0 = 45.4 Hz$

٢٧- أ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٣- أ غيرت الذبذبة حتى وصل الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى ، فإذا كانت القيمة العظمى للجهد المؤثر  $100 volts$  ، فأوجد أكبر قيمة للجهد على المكثف والذبذبة التي تحدث عنها .



شكل ٢٣- أ

الجواب :  $\omega = 707 rad/s, V_C = 115.5 V$

٢٨- أ إذا كان عامل الجودة لعائرة التوالي الموضحة في المسألة ٢٧- أ هو  $Q_0$  ، فإذا كانت  $Q_0$  تساوى 5 عندها  $R = 10 \Omega$  .  
فأوجد الذبذبة التي يصل عندها الجهد عبر المكثف إلى قيمته العظمى .

كرر نفس الشيء عندها  $R = 5 \Omega$

الجواب :  $\omega = 990 rad/s$  و  $998 rad/s$

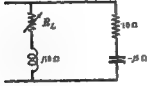
ملحوظة : عندها  $Q_0 > 10$  فإنه يمكن الفرض بأن الجهود عبر  $R$  و  $L$  و  $C$  تصل إلى قيمتها العظمى عند ذبذبة الرنين  $\omega_0$  أو  $f_0$  .

٢٩- أ لتوضيح تأثير  $Q$  على قيمة التيار بالقرب من ذبذبة الرنين ، ارسم القيمة المطلقة ل  $Y$  مع  $\omega$  لعادتين بالتوازي التالية .  
العائرة الأولى  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.05 H$  و  $C = 20 \mu F$  .  
العائرة الثانية :  $R = 10 \Omega$  و  $L = 0.05 H$  و  $C = 20 \mu F$  .

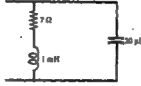
٣٠- أ في دائرة التوالي الموضحة في الشكل ٢٤- أ إذا كانت  $L = 0.2 H$  و  $C = 30 \mu F$  ، فبين ذبذبة الرنين عندها  $R_L = 0$  ثم عاودها بذبذبة الرنين عندها  $R = 30 \Omega$  .

الجواب :  $\omega_0 = 408 rad/s, \omega_0 = 323 rad/s$

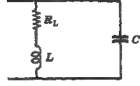




شكل ٣٦ - أ



شكل ٣٧ - أ



شكل ٣٨ - أ

٣٦ - أ أوجد ذبذبة الرنين  $f_0$  لدائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣٦ - أ .

الجواب :  $f_0 = 159 \text{ Hz}$  .

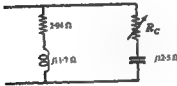
٣٧ - أ في المسألة ٣٦ - أ ، أوجد قيمة المقاومة التي يجب توصيلها على التوالي مع المكثف حتى تصبح ذبذبة الرنين  $300 \text{ Hz}$  .

الجواب :  $R_C = 6 \Omega$  .

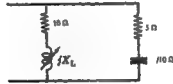
٣٨ - أ أوجد قيمة  $R_L$  التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣٨ - أ في حالة رنين .

الجواب :  $R_L = 12.25 \Omega$  .

٣٩ - أ عند أية قيمة لـ  $X_L$  تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣٩ - أ في حالة رنين ؟ بين الحل المختص لـ  $X$  لتوضيح النتائج .



شكل ٣٨ - أ

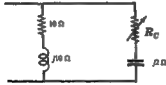


شكل ٣٩ - أ

٣٥ - أ أوجد قيمة  $R_C$  التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣٨ - أ في حالة رنين . بين الحل المختص لـ  $X$  لتوضيح هذه النتيجة .  
الجواب :  $R_C = 0$  .

٣٦ - أ تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٣٩ - أ في حالة رنين عندما  $X_C = 9.68 \Omega$  وعندما  $X_C = 1.65 \Omega$  . أوجد اختيار المفاوئ لكل قيمة من قيم المقاومة السمية .

الجواب :  $1.83 / 0^\circ \text{ A}$  ,  $3.61 / 0^\circ \text{ A}$  .



شكل ٤٠ - ٨



شكل ٣٩ - ٨

٣٧ - ٨ عند أية قيمة لـ  $R_C$  تكون دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٤٠ - ٨ في حالة رنين ؟

الجواب :  $R_C = 6 \Omega$  .

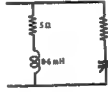
٣٨ - ٨ يؤثر جهد  $V = 50 \angle 0^\circ$  على دائرة توالى تتكون من عازلة حثية ثابتة  $X_L = 5 \Omega$  ومقاومة متغيرة . ارسم المحل الهندسي لمساحة وتيار هذه الدائرة .

٣٩ - ٨ يؤثر جهد  $V = 50 \angle 0^\circ$  على دائرة توالى تتكون من مقاومة ثابتة  $R = 5 \Omega$  وسعة متغيرة  $C$  . ارسم المحل الهندسي لمساحة وتيار هذه الدائرة .

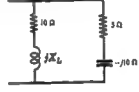
٤٠ - ٨ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٤١ - ٨ احس بتدوين حدود . ارسم المحل الهندسي لمساحة الدائرة لتبين أنه لا يمكن الحصول على رنين في هذه الدائرة .



شكل ٤١ - ٨



شكل ٤٢ - ٨



شكل ٤٣ - ٨

٤١ - ٨ الدائرة الموضحة في الشكل ٤٢ - ٨ تكون في حالة رنين عند قيمتين لـ  $C$  عندما  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  . أوجد قيمتي  $C$  ثم ارسم المحل الهندسي للمساحة .

الجواب :  $121 \mu\text{F}$  ،  $20.6 \mu\text{F}$  .

٤٢ - ٨ في دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٤٣ - ٨ كان التيار  $I_T$  لاحقاً للجهد بزاوية  $53.1^\circ$  عندما  $R = 0$  وإذا كانت  $R = \infty$  (دائرة مفتوحة) فإن  $I_T$  يكون سابقاً للجهد بنفس الزاوية . ارسم المحل الهندسي للمساحة لتوضيح هذه النتيجة - عند أية قيمة لـ  $R$  تكون الدائرة في حالة رنين ؟

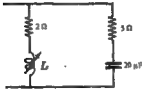
الجواب :  $R = 6.25 \Omega$  .

٤٣ - ٨ أوجد قيمة  $R$  التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٤٤ - ٨ في حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسي للمساحة لتوضيح النتيجة .

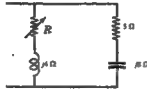
٤٤ - ٨ في المسألة ٤٣ - ٨ ، ما هو المتغير الذي يجب ادخاله على المسألة الحالية حتى نحصل على رنين عند قيمة ما للمقاومة المتغيرة  $R$  ؟ الجواب :  $X_L \leq 8.2 \Omega$  .

٤٥ - ٨ أوجد قيمة  $R$  التي تجعل دائرة التوازي الموضحة في الشكل ٤٥ - ٨ في حالة رنين ثم ارسم المحل الهندسي .

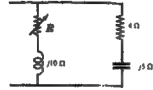
الجواب :  $R = 5.34 \Omega$  .



شكل ٤٦ - أ



شكل ٤٨ - أ



شكل ٤٩ - أ

٤٦ - أ في المسألة ٤٦ - أ ، حصلنا على دالتين في الدائرة بتغيير السعة  $C$  . استخدم المثل المتناسق للمساعدة لتبين أنه توجد قيمة واحدة للسعة  $C$  تجعل الدائرة في حالة دالتين بدلاً من القيمتين المتعادتين .

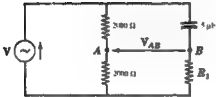
٤٧ - أ دائرة التوافق الموضحة في الشكل ٤٦ - أ تصبح في حالة دالتين بتغيير  $L$  . ارسم المثل المتناسق للمساعدة وعين قيمة  $L$  عند الدالتين إذا كانت  $\omega = 3000 \text{ rad/s}$  . الجواب :  $L = 2.43 \text{ mH}, 0.066 \text{ mH}$  .

٤٨ - أ باستخدام المثل المتناسق للمساعدة في المسألة ٤٧ - أ ، أوجد قيمة  $L$  التي تجعل التيار الكلي أقل ما يمكن . ثم أوجد قيمة التيار إذا كانت القيمة المعادلة لمجهود المؤثر هي  $100 \text{ volts}$  .

الجواب :  $L = 2.95 \text{ mH}$  و  $I_T = 5.1 \text{ A}$

٤٩ - أ في المسألة ٤٧ - أ إذا كان الجهد المؤثر هو  $V = 150/75^\circ \text{ V}$  فاحسب قيمة  $I_T$  عند كل قيمة لـ  $L$  تجعل الدائرة في حالة دالتين .

الجواب :  $I_T = 7.98/75^\circ \text{ A}, 78.9/75^\circ \text{ A}$

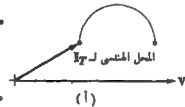
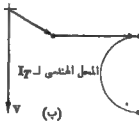
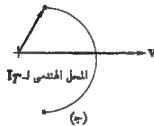


شكل ٥٠ - أ

٥٠ - أ في دائرة تغيير الطور الموضحة في الشكل ٤٧ - أ يراد تغيير طور  $V_{AB}$  في المدى من  $10^\circ$  لاحق إلى  $170^\circ$  لاحق بالنسبة للجهد المؤثر  $V$  . فإذا كانت الترددية هي  $60 \text{ Hz}$  فأوجد مدى  $R_1$  الذي يحقق هذا التغيير .

الجواب :  $46.4 \rightarrow 6080 \Omega$

٥١ - أ توضح الأشكال ٤٨ - أ (أ) ، (ب) ، (ج) المثل المتناسق لتيار الكلي المار في دائرة تحتوي على عنصر متغير واحد . وضح الدائرة المقابلة لكل مثل متناسق .



شكل ٤٨ - أ

الجواب (١) - دائرة توازي من فرعين الأول به  $R$  و  $X_C$  ثابتن والثاني به  $R$  ثابتة و  $X_L$  متغيرة .

(ب) - دائرة توازي من ثلاثة أفرع : الأول به  $R$  و  $X_C$  ثابتن والثاني به  $X_C$  ثابتة والثالث به  $R$  ثابتة و  $X_L$  متغيرة .

(ج) - دائرة توازي من فرعين : الأول به  $R$  و  $X_C$  ثابتن والثاني به  $X_L$  ثابتة و  $R$  متغيرة .



٨-٢٧ أوجد ثوابت الدائرة وطريقة توصيلها التي تعادل الحمل الهندسي لتيار الموضع في الشكل ٨-٩ ، علما بأن  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$  .

الجواب : الفرع الأول :

$$R = 7.07 \Omega , L = 3.54 \text{ mH}$$

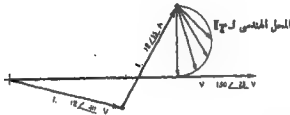
$$R = 7.07 \Omega , C \text{ متغيرة} , \text{ الفرع الثاني}$$

شكل ٨-٩

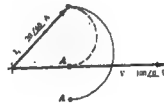
٨-٢٧ أوجد ثوابت الدائرة وطريقة توصيلها التي تعادل الحمل الهندسي لتيار الموضع في الشكل ٨-٩ ، علما بأن  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$  .

يصل النقطة A تقع على الجهد المطاوع ؟

الجواب : وضع  $X_L = 5.78 \Omega$



شكل ٨-١٠



شكل ٨-١١

١-٨ إذا كان الشكل ٨-١٠ يوضح الحمل الهندسي لتيار دائرة توازي تتكون من ثلاثة أفرع فبين جد . ثوابت الدائرة علما بأن  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$  .

الجواب : الفرع الأول :  $R = 8.05 \Omega , L = 0.423 \text{ mH}$  .

الفرع الثاني :  $R = 4.16 \Omega , C = 27.7 \mu\text{F}$  .

الفرع الثالث :  $R$  متغيرة و  $L = 2.74 \text{ mH}$  .

## الفصل التاسع

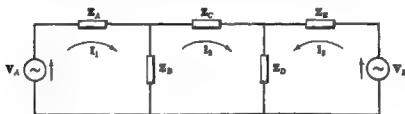
### تحليل الشبكات الكهربائية بطريقة تيار الشبكة

مقدمة :

إن وجود مصادر الجهد في الدوائر الكهربائية أو الشبكات ينتج عنه مرور تيار في كل فرع وفروع جهد عبر عناصر الدائرة . وحل الشبكة الكهربائية عبارة عن إيجاد التيارات في الأفرع المغلقة أو الجهود عبر العناصر .

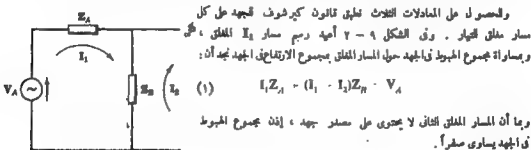
تيارات الشبكة :

لتطبيق طريقة تيار الشبكة واختار مساراً مطلقاً لتيار يسمى تيارات الشبكة أو تيارات المسار المغلق ، كما هو موضح في الشكل ٩ - ١ ثم نكتب ثلاث معادلات في المعامل الثلاثة  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  ونحلها . والآن فإن تيار أي فرع يمكن الحصول عليه إما مباشرة كواحد من تيارات الشبكة أو بالتجميع فيها بينهم .



شكل ٩ - ١ تيارات الشبكة أو المسار المغلق في الشبكة الكهربائية

ولما كان التيار في  $Z_H$  هو  $I_1$  فإن التيار في  $Z_H$  هو  $I_1 - I_2$  . وذلك بفرض أن اتجاه التيار الموجب هو لأعلى خلال المقاومة . وحل ذلك فإن تيار أي فرع في الشبكة يمكن الحصول عليه بطريقة ماثلة . والجهد عبر أي عنصر من عناصر الدائرة هو حاصل ضرب التيار المثار في العنصر في المقاومة المركبة .



شكل ٩ - ٢

والحصول على المعادلات الثلاث نطبق قانون كيرشوف للجهد على كل مسار مغلق للتيار . وفي الشكل ٩ - ٢ أميد رسم مسار  $I_1$  المغلق ، وفي مساواة مجموع الجهد في الجهد حول المسار المغلق بمجموع الارتفاع في الجهد نجد أن :

$$(1) \quad I_1 Z_A - (I_1 - I_2) Z_B = V_A$$

وبما أن المسار المغلق الثاني لا يحتوي على مصدر جهد ، إذن مجموع الجهد في الجهد يساوي صفراً .

$$(2) \quad I_2 Z_C + (I_2 + I_1) Z_D + (I_2 - I_1) Z_B = 0$$

ويعطى قانون كيرشوف على المسار المثلث الثالث نهد أن :

$$(٢) \quad I_3 Z_B + (I_3 + I_2) Z_D = V_B$$

وبإعادة الترتيب نحصل على :

$$(١) \quad (Z_A + Z_B) I_1 - Z_B I_3 = V_A$$

$$(٢) \quad -Z_B I_1 + (Z_B + Z_C + Z_D) I_3 + Z_D I_2 = 0$$

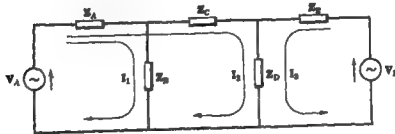
$$(٣) \quad Z_D I_2 + (Z_D + Z_B) I_3 = V_B$$

ويمكننا الحصول على المعادلات السابقة مباشرة ، فإذا اعتبرنا المسار المثلث الموضح في الشكل ٩ - ٢ وأعدنا اتجاه التيار  $I_1$  في اتجاه عقارب الساعة فإن جميع المجهود في الجهد في هذا المسار والنتيجة عن  $I_1$  تكون موجبة . وبمرأياً تيار الشبكة  $I_2$  في  $Z_B$  ولكن في اتجاه مخالف لاتجاه  $I_1$  . وذلك فإن المجهود في الجهد على  $Z_B$  والنتائج عن  $I_2$  يكون  $I_2 Z_B$  — . ونلاحظ أن الجهد  $V_A$  يكون موجباً لأنه في نفس اتجاه  $I_1$  . والآن إذا طبقنا قانون كيرشوف مع كل هذه الاحتمالات على المسار المثلث نحصل على المعادلة (١) . ويمكن الحصول على المعادلتين (٢) و (٣) بطريقة ماثلة .

لقد استمرنا هنا نعتبر في الاتجاه في الجهد و في المجهود في الجهد و من دوائر التيار المستمر حيث مناهنا هناك أكثر وضوحاً منه في الدوائر الجيبية التي فيها التيار والجهد القطبان لها اثرات موجبة وسالبة . وفي الحالة الجيبية المستمرة ، فإن تطبيق قانون كيرشوف على مسار مثلث يعني مساواة طورية يتساوى فيها مجموع الجهود المطبورة عبر المارقات بمجموع الجهود المطبورة للصادر المازرة على نفس المسار المثلث .

#### اختيار تيارات الشبكة :

في حالة تطبيق طريقة تيارات الشبكة ، يمكن تبسيط حل المسألة المطبوعة عن طريق الاختيار المناسب للمسار المثلث في الشبكة الكهربائية . فإذا أردنا تعيين التيار المار في الفرع الذي يحوي على  $Z_B$  فقط في الشكل ٩ - ١ ، فإنه من الأسهل اختيار مسار مثلث واحد فقط يمر به  $Z_B$  ، حيث أننا نريد الحصول على تيار الشبكة  $I_1$  فقط . ويوضح الشكل ٩ - ٣ الممارات الجيدة المختارة .



شكل ٩ - ٣

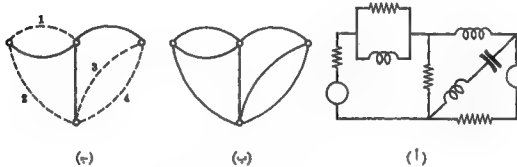
ومعادلات تيار الشبكية المقابلة لهذا الاختيار هي :

$$\begin{aligned}(Z_A + Z_D)I_1 + Z_A I_2 &= V_A \\ Z_A I_1 + (Z_A + Z_C + Z_D)I_2 + Z_D I_3 &= V_A \\ Z_D I_1 + (Z_D + Z_E)I_3 &= V_D\end{aligned}$$

وعموماً فإنه في أي اختيار لتيار الشبكية الكهربائية لابد أن يكون لكل عنصر من عناصر الدائرة تيار واحد فقط على الأقل ، وألا يلتزم بوجود فرعين لما نفس التيار أو نفس مجموعة تيارات . ونورد في الفقرة التالية قواعد اختيار عدد تيارات الشبكية اللازمة لحل الشبكة الكهربائية ، علماً بأن مجموعة التيارات الصحيحة هي ليست أقل عدد من تيارات الشبكة .

### إيجاد العدد اللازم من تيارات الشبكية :

من السهل تحديد العدد اللازم من تيارات الشبكية لحل شبكة كهربائية بسيطة . أما في حالة وجود عديد من الشبكات فإذا يلزمنا طريقة لتحديد عدد المعادلات اللازمة .



شكل ٩ - ٤ شبكة كهربائية . بيانها وهيكلها

يوضح الشكل ٩ - ٤ (ب) بيان الشبكة الكهربائية وفيه مثلت نقط الاتصال بدوائر صغيرة وأفرع الشبكة بخطوط . والشكل ٩ - ٤ (ج) يوضح لنا هيكل الشبكة الكهربائية والتي حصلنا عليه باختيار الأفرع التي لا تدخل مسارات مغلقة فقط . وهيكل الشبكة الكهربائية ليس وحيداً . وتسمى الخطوط المتصلة في الشكل ٩ - ٤ (ج) بهيكل الأفرع أما الخطوط المتقطعة تسمى أفرع اتصال ، وكل فرع اتصال ينتج عنه مسار مغلق . إن عدد تيارات الشبكة اللازمة في هذه الشبكة الكهربائية هو عدد أفرع الاتصال ( أربعة ) . نفس النتيجة يمكن الحصول عليها بقطع أفرع الشبكة الأصلية بحيث أن كل قطع يفتح لنا مساراً مغلقاً . وعندما لا يبقى عندنا مسارات مغلقة فإن عدد الأفرع المقطوعة يمثل عدد تيارات الشبكة اللازمة .

وهناك طريقة ثالثة تتكون من عدد الأفرع ونقط الاتصال في الشبكة الكهربائية ، ويسمى عدد تيارات الشبكة اللازمة بالمعادلة الآتية :

عدد المعادلات = عدد الأفرع - ( عدد نقط الاتصال - ١ ) .

وفي الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٤ (أ) لدينا سبعة أفرع وأربع نقط اتصال ، وحل ذلك فإن عدد تيارات الشبكة اللازمة هو  $7 - (4 - 1) = 4$

## معادلات الشبكة عن طريق القميص :

الصورة العامة لمعادلات الشبكة الكهربائية التي بها ثلاث شبكات فرعية هي .

$$Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 = V_1$$

$$\pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 = V_2$$

$$\pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 = V_3$$

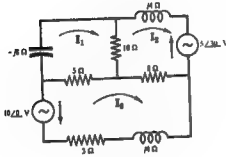
تسمى المعادلة الذاتية لمسار الملق الأول وتصل بمجموع جميع المعاوقات التي يمر فيها التيار  $I_1$  .  $Z_{22}$  و  $Z_{33}$  هما المعاوقات الذاتية لمسارين الملقين الثاني والثالث ، ويطلق بمجموع المعاوقات في المسار الملق لكل منهما .

$Z_{12}$  هي مجموع كل المعاوقات المشتركة بين تيارَي الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  . من هذا ينتج أن  $Z_{12} = Z_{21}$  . والمعاوقات  $Z_{13}$  و  $Z_{23}$  هي مجموع المعاوقات المشتركة بين التيارات المارة في المسارات المختلفة الخاصة بها . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان كل من التيارين الذي تمر في المعاوقة المشتركة في نفس الاتجاه ، وتستخدم الإشارة السالبة في عكس ذلك .

تمثل  $V_1$  مجموع الجهود التي تعمل في المسار الأول . وتستخدم الإشارة الموجبة إذا كان المصدر يعمل في اتجاه تيار الشبكة والإشارة السالبة إذا كان يعمل في عكس اتجاه تيار الشبكة .  $V_2$  و  $V_3$  هما مجموع المصادر التي تعمل في المسار الملق لكل منهما .

## مثال ١ :

اكتب معادلات تيارات الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-٥ .



شكل ٩-٥

إن تيارات الشبكة موضحة في رسم النائرة ، وبما أنه لا يوجد مصدر الجهد في المسار الملق الأول فإن مجموع المربوط في الجهد يساوي صفراً .

$$I_1(-10) + (I_1 - I_2)10 + (I_1 - I_3)5 = 0$$

وبما أن مصدر الجهد  $5/20^\circ$  والى يعمل في المسار الملق الثاني اتجاهاه في عكس اتجاه التيار إذن فإن علامته سالبة .

$$I_2(10) - (I_1 - I_2)10 + (I_2 - I_3)8 = 0$$

ويعطى قانون كير شوف الجهد على المسار الثالث يحصل على

$$I_3(10) - (I_2 - I_3)8 + (I_3 - I_1)3 = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود في المعادلات الثلاث نحصل على

$$(15 - 10)I_1 - 10I_2 - 5I_3 = 0$$

$$-10I_1 + (18 + 10)I_2 - 8I_3 = 0$$

$$-5I_1 - 8I_2 + (10 + 3)I_3 = 0$$



ومقارنة مجموعة المعادلات هذه بالصورة العامة للمعادلات الثلاث الخاصة بالشبكة الكهربائية ذات ثلاث شبكات فرعية ، نجد أن المعادلة الثانية المسار الأول هي  $Z_{11} \cdot (5 - 10 - j8) = 15 - j8 \Omega$  ، والمعادلة المشتركة بين المسارين المثلثين الأول والثاني هي  $Z_{12} = 10 \Omega$  ، وعلى ذلك فإن  $I_2$  في عكس اتجاه التيار  $I_1$  ، أي أن  $Z_{12}$  لها إشارة سالبة . وبالمثل نجد أن المعادلة المشتركة بين المسارين المثلثين الأول والثالث هي  $Z_{13} = -5 \Omega$  . ونلاحظ أن  $Z_{23} = Z_{32}$  ،  $Z_{21} = Z_{12}$  ،  $Z_{31} = Z_{13}$  .  
 الجهد الذي يعمل في المسار الثاني هو  $5/30^\circ V$  ولكنه يعمل في عكس اتجاه تيارا الشبكة وعلى ذلك فإن إشارته سالبة . ويمكن اعتبار كل حد في مجموعة المعادلات السابقة بالصيغة العامة .

### مصفوفات :

المصفوفة هي ترتيب تامني لأعداد أو دوال موضوعة بين قوسين وتختص لقواعد خاصة في العمليات ، نرى المصفوفة ،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تسمى الأعداد أو الدوال  $a_{ij}$  بمتنصر المصفوفة ، فالمتنصر  $a_{ij}$  يقع في الصف  $i$  والعمود  $j$  ورتبة هذه المصفوفة ذات  $m$  سفا و  $n$  عموداً "  $m \times n$  " وتسمى " المصفوفة  $A$  " أو " مصفوفة  $m \times n$  "  $A$  ، أو " مصفوفة  $m \times n$  "  $A$  .

يقال عن مصفوفتين أنهما متساويتان إذا - وإذا لقط - كانت اصطفا مطابقة تماماً لثانية .

### جمع المصفوفات :

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين إذا كانتا من نفس الرتبة وإذا اختلفتا مصفوفتين في الرتبة فإنه لا يمكن جمعها أو طرحها .

إن مجموع ( فرق ) مصفوفتين من الرتبة  $m \times n$  مثل  $A = [a_{ij}]$  و  $B = [b_{ij}]$  هو مصفوفة  $C$  من الرتبة  $m \times n$  بحيث كل عنصر في  $C$  هو مجموع ( فرق ) المتنصرين المتقابلين في  $A$  و  $B$  ، أي  $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$

### مثال ٢ :

$$\text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} , \quad A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 4+2 & 0+6 \\ 2+0 & 7+1 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

### ضرب المصفوفات :

إن حاصل الضرب  $AB$  (بنفس الترتيب) المصفوفتين :  $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}]$  مصفوفة  $1 \times m$  .

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة } m \times 1$$

هو  $1 \times 1$  مصفوفة حيث

$$C = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}] = \left[ \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} \right]$$

لاحظ أن كل عنصر في الصف قد ضرب في العنصر المقابل له في العمود ثم جمع حاصل الضرب .

$$\text{مثال ٣ :} \quad [1 \ 3 \ 5] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = [1(2) + 3(4) + 5(-2)] = [4]$$

إن حاصل الضرب  $AB$  (بنفس الترتيب)  $A = [a_{ij}]$  مصفوفة  $m \times s$  ،  $B = [b_{ij}]$  مصفوفة  $s \times n$  هو  $C = [c_{ij}]$  مصفوفة  $m \times n$  حيث

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٤ :}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & -6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_1 + 8I_2 - 6I_3 \\ 2I_1 + I_2 + 6I_3 \\ 4I_1 - 6I_2 + 7I_3 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٥ :}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(8) + (-3)(7) & 5(-2) + (-3)(0) & 5(6) + (-3)(9) \\ 4(8) + 2(7) & 4(-2) + 2(0) & 4(6) + 2(9) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -10 & 3 \\ 46 & -8 & 42 \end{bmatrix} \quad \text{مثال ٦ :}$$

ويقال إن مصفوفة  $A$  مناسبة للضرب في مصفوفة  $B$  ، أي أن حاصل الضرب  $AB$  يمكن تعريفه ، إذا كان عدد الأعمدة في  $A$  يساوي عدد الصفوف في  $B$  . وكل ذلك إذا كانت  $A$  هي المصفوفة  $3 \times 2$  و  $B$  هي المصفوفة  $2 \times 5$  فإن حاصل الضرب  $AB$  يكون معرفةً أما حاصل الضرب  $BA$  فهو غير معرف . وإذا كانت  $D$  هي المصفوفة  $3 \times 3$  و  $E$  هي المصفوفة  $3 \times 3$  فإن كلا من حاصل الضرب  $DE$  و  $ED$  يكون معرفةً .

## التماكس :

يقال إن التماكس موجود في ترتيب معين لأعداد موجبة صحيحة إذا كان العدد الصحيح الأكبر سابقاً للعدد الصحيح الأصغر في هذا الترتيب .

فلا نجد في 132 أن 3 تسبق 2' وكل ذلك فإنه يوجد تماكس واحد . وفي 4213 نجد أن 4 تسبق كلا من 3 ، 1 ، 2 ، وأن 2 تسبق 1 وكل ذلك فإنه توجد أربعة تماكسات . وفي 3421 نجد أن 3 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 4 تسبق كلا من 1 ، 2 ، كما أن 2 تسبق 1 . كل ذلك فإنه توجد خمسة تماكسات .

## محددة المصفوفة المربعة :

عد  $n$  عنصراً من المصفوفة المربعة  $n$  —

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ثم شكل حاصل الضرب  $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$  بحيث يلتصق عنصر وعنصر واحد فقط لكل صف وعمود يلتصق عنصر وعنصر واحد فقط لكل عمود . لاحظ أن متتابعة الدليل الأول هي من الرتبة  $n$  و 2 و 1 وأن متتابعة الدليل الثاني  $n$  و 0 و 1 هي تبديلات للـ  $n$  تبديلات للأعداد الصحيحة  $n$  و 0 و 2 و 1 . الإشارة الموجبة أو السالبة لحاصل الضرب تتبع عدد التماكسات في الدليل الثاني إذا كان زوجياً أو فردياً .

إن محددة المصفوفة المربعة  $A$  من رتبة  $n$  وتكتب  $|A|$  هي مجموعة كل  $n!$  .

تسمى محددة المصفوفة المربعة من رتبة  $n$  بمحددة من الرتبة  $n$  .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{مثال ٧ :}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad \text{مثال ٨ :}$$

## المحددات والعوامل المشتركة :

إن محددة العنصر  $a_{ij}$  محددة من الرتبة  $n$  هو محددة من الرتبة  $(n-1)$  والتي تحصل عليها بحذف الصف والعمود المحتويين للعنصر المحدلي . ويرمز لمحددة العنصر  $a_{ij}$  بالرمز  $|M_{ij}|$  .

وتسمى المحددة  $|M_{ij}|$  بالمتل المشترك لـ  $a_{ij}$  ويرمز لها بالرمز  $\Delta_{ij}$  .

مثال ٩ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{المحدد من الرتبة الثالثة}$$

يجد أن :

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} , \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

قيمة المحددة :

إن قيمة المحددة  $|A|$  من الرتبة  $n$  هي مجموع  $n$  حاصل ضرب وكلي نحصل عليه بفقر كل عنصر في أي صف (عمود) نختاره في  $|A|$  بمعاملة المشترك. أي أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

دو التمر عن  $|A|$  من خلال العمود الثاني .

مثال ١٠ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4(-6) - 7(1)) - 5(1(-6) - 7(2)) + 0 = 7$$

مثال ١١ :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5(1(3) - 2(4)) = 25$$

مثال ١٢ :

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 5(4(-3) - (-2)(6)) = 20$$

خواص المحددات :

١. - إذا تطلب صفان (عمودان) في محدد فإن قيمة المحددة تساوي صفراً . فمثلا :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

٢ - إذا ضرب كل عنصر في صف ما ( عمود ) في المصفوفة بأى عدد  $k$  فإن المصفوفة تكون مضروبة في  $k$  . فمثلا

$$2 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -8 & 4 \\ -2 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

٣ - إذا تبادلنا أى صفين ( عمودين ) في مصفوفة فإن إشارة المصفوفة تتغير . فمثلا .

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \\ -6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

٤ - إذا عوضنا عن كل عنصر من عناصر صف ( عمود ) في مصفوفة بمجموع عددين أو أكثر ، فإنه يمكن كتابة المصفوفة على صورة مجموع مصفوفتين أو أكثر . فمثلا .

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9+2 & 5 \\ 2 & 4+0 & -5 \\ 1 & 8-2 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 & 5 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 8 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}$$

٥ - إذا أضفنا إلى عناصر أى صف ( عمود ) في مصفوفة  $k$  مرة من العناصر المقابل لأى صف ( عمود ) آخر فإن قيمة المصفوفة لا تتغير .

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -8 \\ 4 & 6 & -2 \\ -8 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9+8(-8) & -8 \\ 4 & 6+8(-2) & -2 \\ -8 & 1+8(5) & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 16 & 5 \end{vmatrix}$$

### حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات . قاعدة كرامر :

يمكن كتابة مجموعة المعادلات الخطية في المجهول الثلاثة  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

على صورة مصفوفة مثل :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

تكون القيمة العددية لعامل المدة  $\Delta_{22}$  مضروبة في  $v$  إذا ضربنا كل عنصر من عناصر المود الأول في  $x_1$  (خاصية 2).

$$x_1 \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

والآن إذا أضفنا إلى كل عنصر من عناصر المود الأول في المدة الأخيرة  $x_2$  مرة من العنصر المقابل في المود الثاني و  $x_2$  مرة من العنصر المقابل في المود الثالث. (خاصية 3) فإننا نحصل على :

$$x_1 \Delta_{22} = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_{22}}$$

أو

مما أن  $\Delta_{22} \neq 0$  وبالتالي :

$$\Delta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_{22}} \quad \Delta_{22} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta_{22}}$$

وتسمى هذه الطريقة في الحل بتقاعة كرامر . ويمكن تطبيقها على أي مجموعة تحتوي على  $n$  من المعادلات الخطية في  $n$  مجهول مما أن عوامل المدة لا تساوى صفرًا .

### طريقة المصفوفة في تحليل الدوائر :

إن معادلات تيار الشبكة الثلاث :

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 \pm Z_{13}I_3 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \pm Z_{23}I_3 &= V_2 \\ \pm Z_{31}I_1 \pm Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= V_3 \end{aligned}$$

يمكن كتابتها الآن على صيغة مصفوفة :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[Z][I] = [V]$$

أو

وهي الصيغة المصفوفية لقانون أوم حيث  $[Z]$  هي مصفوفة المعاوقة ،  $[I]$  هي مصفوفة التيار ،  $[V]$  هي مصفوفة الجهد .

ويمكن الحصول على تيارات الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  كمتبة بين محددين .

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & \pm Z_{12} & \pm Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & \pm Z_{23} \\ V_3 & \pm Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & \pm Z_{13} \\ \pm Z_{21} & V_2 & \pm Z_{23} \\ \pm Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_z} \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & \pm Z_{12} & V_1 \\ \pm Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ \pm Z_{31} & \pm Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\Delta_z}$$

وعند ذلك محددة البسط بواسطة المود المعوى على الجهود فإننا نحصل على معادلات تيارات الشبكة التالية .

$$(1) \quad I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right)$$

$$(2) \quad I_2 = V_1 \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{32}}{\Delta_z} \right)$$

$$(3) \quad I_3 = V_1 \left( \frac{\Delta_{13}}{\Delta_z} \right) + V_2 \left( \frac{\Delta_{23}}{\Delta_z} \right) + V_3 \left( \frac{\Delta_{33}}{\Delta_z} \right)$$

إن الحدود التي في الطرف الأيمن للمعادلات (١) و (٢) و (٣) هي المركبات الطورية الناتجة من مصادر الجهد المختلفة . وحل ذلك فإن تيار الشبكة  $I_1$  في المعادلة (١) يتكون من ثلاثة أجزاء :  $V_1(\Delta_{11}/\Delta_z)$  نتيجة مصدر الجهد  $V_1$  و  $V_2(\Delta_{21}/\Delta_z)$  نتيجة مصدر الجهد  $V_2$  و  $V_3(\Delta_{31}/\Delta_z)$  نتيجة مصدر الجهد  $V_3$  .

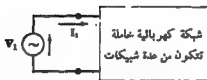
### نقطة المعاوقة المحركة :

اعتبر الشبكة الخاملة أو الخالية من المصادر الموضحة في الشكل ٩ - ٦ ولقي لها نقطتا اتصال خارجيتان ، فإذا أقر عليها مصدر جهد  $V_1$  وكان تيار الشبكة هو  $I_1$  ، وسبب أنه لا توجد مصادر أخرى في الشبكة الكهربائية ، فإن معادلة تيار الشبكة تكون

$$I_1 = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right) + (0) \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} \right) + (0) \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_z} \right) + \dots = V_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} \right)$$

وتعرف المعاوقة الداخلة أو نقطة المعاوقة المحركة بأنها النسبة بين الجهد المؤثر  $V_1$  والتيار الناتج  $I_1$  . أي أن

$$Z_{\text{معاوقة داخلة}} = V_1/I_1 = \Delta_z/\Delta_{11}$$

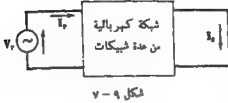


شكل ٩ - ٦

وتعرف المعاوقة الداخلة لشبكة كهربائية لنقطة بأنها معاوقة الشبكة الكهربائية بين تياريتين محددين وذلك مع دفع جميع المصادر الداخلية ووضع معاوقاتها الداخلية بدلاً منها . وحل ذلك فإن النسبة  $\Delta_z/\Delta_{11}$  هي نقطة المعاوقة المحركة المسار المتلق الأول بنفس النظر من الشبكة الكهربائية سواء كانت خاملة أو نقطة .

### معاوقة الانتقال :

إن وجود مصدر محرك الجهد في أى شبكة فرعية ينتج عنه تيار في الشبكات الفرعية الأخرى الشبكة الكهربائية الكلية . وتعرف معاوقة الانتقال بأنها النسبة بين الجهد المحرك في شبكة فرعية والتيار الناتج في شبكة فرعية أخرى مع وضع جميع المصادر مساوية للصفر .



وباعتبار الشبكة الموضحة في الشكل ٩ - ٧ والتي فيها  $V_r$  هو الجهد المحرك في الشبكة  $r$  والتيار الناتج  $I_r$  في الشبكة  $s$  فإن

$$I_s = (0) \left( \frac{\Delta_{1s}}{\Delta_s} \right) + \dots + V_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_s} \right) + \dots + (0) \left( \frac{\Delta_{ss}}{\Delta_s} \right) = V_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_s} \right)$$

$$Z_{rs, transfer} = V_r / I_s = \Delta_s / \Delta_{rs}$$

والدليل المزدوج ،  $r$  لمعاوقة الانتقال يضى اتجاه الفعل ، أى أن المصدر في الشبكة  $r$  والتيار الناتج في الشبكة  $s$  . ومن ذلك فإن معاوقة المقام هي العامل المشترك للموضع ،  $s$  ،  $r$  ،  $\Delta_s$  ، وينتج دليل معاوقة الانتقال .

### مسائل محلولة

٩ - ١ إذا أُعطيت الاعتبار الموضح في الشكل ٩ - ٨ لتيارات الشبكة لاكتب معادلات تيارات الشبكة ثم قسمها في السلسلة المصفوية .

بتطبيق قانون كير شوف الجهد على كل من الشبكات الثلاث الفرعية :

$$I_1(2-j3) + (I_1-I_2)(j5) + (I_1-I_3)5 = 10\angle 0^\circ$$

$$I_2(10) + (I_2-I_3)(2-j3) + (I_2-I_1)(j5) = -5\angle 80^\circ$$

$$I_3(10) + (I_3-I_1)5 + (I_3-I_2)(2-j3) = -10\angle 90^\circ$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على :

$$(7+j3)I_1 - (j5)I_2 - (5)I_3 = 10\angle 0^\circ$$

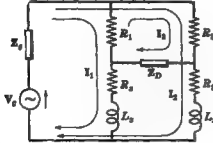
$$-(j5)I_1 + (12+j3)I_2 - (2-j3)I_3 = -5\angle 80^\circ$$

$$-(5)I_1 - (2-j3)I_2 + (17-j3)I_3 = -10\angle 90^\circ$$

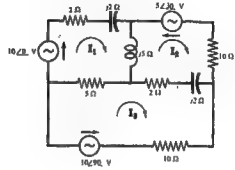
والتي يمكن التعبير عنها بالصورة المصفوية على الشكل :

$$\begin{bmatrix} 7+j3 & -j5 & -5 \\ -j5 & 12+j3 & -(2-j3) \\ -5 & -(2-j3) & 17-j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ -5\angle 80^\circ \\ -10\angle 90^\circ \end{bmatrix}$$





شكل ٩ - ٩

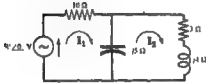


شكل ٨ - ٩

٩-٧ أكتب معادلات تيار الشبكة على الصيغة المصفوفية بالفحص وذلك للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-٩.

تحدد الحدود في مصفوفة المعاوقة بتعريفاتهم .  $Z_{11}$  المعاوقة الذاتية لمسار الحلقة الأول وهي مجموع جميع ، المعاوقات في المسار المغلق ،  $(R_1 + R_2 + j\omega L_2 + Z_D)$   $Z_{12}$  المعاوقة المشتركة لتياري الشبكة الأول والثاني و  $Z_{21}$  بإشارة موجبة وذلك لأن التيارين يمران في اتجاه واحد . إن مصفوفة التيار تتكون ببساطة من  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  ومصفوفة الجهد تتكون من الجهود المحركة في المسارات المغلقة . وعلى ذلك فالمعادلة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + j\omega L_2 + Z_D) & Z_D & -R_1 \\ Z_D & (R_2 + R_3 + j\omega L_2 + Z_D) & R_3 \\ -R_1 & R_3 & (R_1 + R_3 + Z_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s \\ V_s \\ 0 \end{bmatrix}$$



شكل ١٠ - ٩

٩-١٠ أريد القدرة الداخلة لمصدر الجهد الدائرة الموضحة في الشكل ٩-١٠

ثم عين أيضاً قدرة مقاومات الدائرة .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في شكل الدائرة وعلى ذلك فإن المصدر يحتوي على تيار واحد . إذن

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

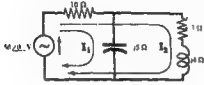
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & j5 \\ 0 & 3 - j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{vmatrix}} = \frac{150 - j50}{50 - j25} = 2.83/8.14^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4.47/-68.4^\circ \text{ A}$$

ومصدر القدرة :  $P = V \cos \theta = 50(2.83) \cos(8.14^\circ) = 140 \text{ W}$  . والقدرة في المقاومة  $10 \Omega$  هي

$P_{30} = (I_1)^2 10 = (2.83)^2 10 = 80 \text{ W}$  والقدرة في المقاومة  $3 \Omega$  هي  $P_3 = (I_2)^2 3 = 60 \text{ W}$  . وبمجموعهما

هو  $140 \text{ W}$  وهو يساوي القدرة الداخلة للمصدر .



شكل ٩ - ٩

٨ إذا اختيرت تيارات الشبكة لنفس دائرة المسألة ٩ - ٩ بالطريقة الموصلة في الشكل ٩ - ٩ ، فأوجد القدرة الخارجة للمصدر .

$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 18 + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/0^\circ \\ 50/0^\circ \end{bmatrix}$$

وبنها نجد أن

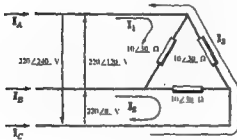
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50/0^\circ & 10 \\ 50/0^\circ & 18 + j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 10 \\ 10 & 18 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{150 + j200}{50 - j25} = 4.47/79.7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50/0^\circ \\ 10 & 50/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_n} = \frac{-j250}{50 - j25} = 4.47/-63.4^\circ \text{ A}$$

وبما أن الفرع الذي يحتوي على المصدر يمر به تياران إذن

$$I_1 + I_2 = \left( \frac{150}{50} \cdot \frac{j200}{j25} \right) + \left( \frac{-j250}{50} \cdot \frac{j25}{j25} \right) = 2.83 \angle 8.14^\circ \text{ A}$$

$$P = I^2 R \cos \theta = 50(2.83) \cos 8.14^\circ = 140 \text{ W} \quad \text{وقدرة المصدر هي}$$



شكل ٩ - ١٢

٩ - ٩ إذا كان للدائرة الموصلة في الشكل ٩ - ١٢ جهود بين كل زوجين من النقاط الثلاثة . فأوجد التيارات  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  .

وباختيار التيارات كما هو موضح بالرسم نجد أن التيارات مستقلة عن بعضها ، ويتضح هذا عند كتابة المصفوفة بالصورة :

$$\begin{bmatrix} 10/30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10/30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10/30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \\ 220/240^\circ \end{bmatrix}$$

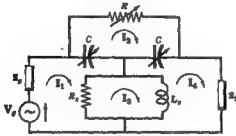
وبنها ينتج التيارات الثلاثة :

$$I_1 = \frac{220/120^\circ}{10/30^\circ} = 22/90^\circ \text{ A}, \quad I_2 = \frac{220/0^\circ}{10/30^\circ} = 22/-30^\circ \text{ A}, \quad I_3 = \frac{220/240^\circ}{10/30^\circ} = 22/210^\circ \text{ A}$$

$$I_A = I_1 - I_3 = (22/90^\circ - 22/210^\circ) = 38.1/60^\circ \text{ A} \quad \text{إذن :}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = (22/-30^\circ - 22/90^\circ) = 38.1/-60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_3 - I_2 = (22/210^\circ - 22/-30^\circ) = 38.1/180^\circ \text{ A}$$



شكل ٩-١٣

٩-٩ إذا اختيرت تيارات الشبكة للشبكة الكهربائية التي تحتوي على أربع شبكات فرعية كما هو موضح في الشكل ٩-١٣ ، وإذا اختيرت قيم  $R$  وسعة المكثفين المتساويين في السعة  $C$  farads بحيث كان التيار المار في  $Z_D$  يساوي صفراً . فعبّر عن الجهدين  $R_x$  و  $Z_x$  بدلالة كل من  $R$  و  $C$  وذبلية المصدر  $\omega$  rad/s .

إن معادلات التيار في الصيغة المصفوية هي :

$$\begin{bmatrix} \left(R_g + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & 0 \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_D) & -(j\omega L_D) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_D) & \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_D + Z_D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن  $I_4$  ، التيار المار في  $Z_D$  ، في سعة محددة ومساوئها بالصفر .

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} \left(R_g + \frac{1}{j\omega C} + Z_g\right) & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -R_x & V_g \\ -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_D) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_D) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_z} = 0$$

وبذلك البسط بواسطة عناصر المصفود الرابع نحصل على

$$-V_g \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & \left(R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}\right) & 0 \\ -R_x & 0 & (R_x + j\omega L_D) \\ 0 & -\left(\frac{1}{j\omega C}\right) & -(j\omega L_D) \end{vmatrix} = 0$$

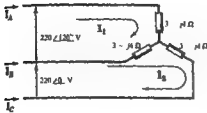
وبحيث أن هذه المحددة مساوية للصفر إذن :

$$-(-R_x)(R + 1/j\omega C + 1/j\omega C)(-j\omega L_D) - (-1/j\omega C)(-1/j\omega C)(R_x + j\omega L_D) = 0$$

$$L_D = 1/2\omega^2 C \quad \text{و} \quad R_x = 1/\omega^2 C R \quad \text{ونمّا نحصل على}$$

٧-٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٩-١٤ بين التيارات  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$ .

إذا اعتبر تيارى الشبكة كما هو موضح في الشكل فإن مسدسها في الصيغة المسقونية هي :



$$\begin{bmatrix} 6-j8 & -(3-j4) \\ -(3-j4) & 6-j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220/120^\circ \\ 220/0^\circ \end{bmatrix}$$

شكل ٩-١٤

وسبب نجد أن :

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} 220/120^\circ & -(3-j4) \\ 220/0^\circ & 6-j8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6-j8 & -(3-j4) \\ -(3-j4) & 6-j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200/66.9^\circ + 1100/-63.1^\circ}{100/-106.2^\circ - 25/-106.2^\circ} = \frac{1905/86.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/143.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{\begin{vmatrix} 6-j8 & 220/120^\circ \\ -(3-j4) & 220/0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6-j8 & -(3-j4) \\ -(3-j4) & 6-j8 \end{vmatrix}} = \frac{2200/-66.9^\circ + 1100/86.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = \frac{1905/-23.9^\circ}{75/-106.2^\circ} = 25.4/82^\circ \text{ A}$$

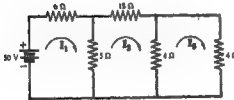
والتيارات المطلوبة هي

$$I_1 = I_A = 25.4/143.1^\circ \text{ A}, I_2 = I_B = 25.4/82^\circ \text{ A}$$

$$I_3 = 25.4/97^\circ \text{ A}$$

٨- باستخدام طرق المسقونات بين المعاوقة الداخلة للمصدر

٩-١٥ ، ثم احسب  $I_3$  باستخدام هذه المعاوقة.



شكل ٩-١٥

إن المعاوقة الداخلة لقياس المسار المثلث الأول هي :

$$Z_{input 1} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -5 & 27 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 27 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{200} = 10 \Omega$$

$$I_1 = V_1/Z_{input 1} = 50/10 = 5 \text{ A}$$

وسبب

٩-١٥ الدائرة الموضحة في الشكل ٩-١٥ أوجد تيار الشبكة  $I_3$  وذلك باستخدام معاوقة الانتقال.

بما أن المصدر في المسار المثلث الأول والتيار المطلوب في المسار المثلث الثالث ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هي

$$Z_{transfer 13} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{11}} = \frac{2000}{20} = 100 \Omega$$

$$I_3 \approx V_1/Z_{transfer 13} = 50/100 = 0.5 \text{ A}$$

وتيار الشبكة المطلوب هو :

١٥-٩ دائرة الموجعة بالشكل ١٥-٩ أوجد تيار الشبكة  $I_2$  وذلك باستخدام معاوقة الانتقال .

بما أن المصدر في المسار المتفق الأول والتيار المطلوب في المسار المتفق الثاني ، إذن معاوقة الانتقال المطلوبة هي

$$Z_{transfer\ 12} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = \frac{2000}{(-3) \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{2000}{40} = 50 \Omega$$

$$I_2 = V_2 / Z_{transfer\ 12} = 50/50 = 1 \text{ A.}$$

والتيار المطلوب هو :

١١-٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٩ أوجد ،

المجهود  $V_{BC}$  و  $V_{AB}$  .

معادلات تيارات الشبكة بالصيغة المصفوية هي :

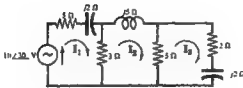
$$\begin{bmatrix} 8 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100 \angle 45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{100} = 0, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 + j14 & 100 \angle 45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_{22}} = \frac{1000 \angle 135^\circ}{100} = 10 \angle 135^\circ \text{ A}$$

$$V_{BC} = I_2 (j10) = 10 \angle 135^\circ (10 \angle 90^\circ) = 100 \angle 45^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad V_{AB} = I_1 (3 \cdot j4) = 0$$

والمجموع هو  $(V_{AB} + V_{BC}) = 100 \angle 45^\circ \text{ V}$  وهو الجهد المطلوب



شكل ١٧-٩

١٧-٩ لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧-٩ أوجد

المركبات الثلاثة لثالث القدرة وذلك بالمصدر  $10 \angle 30^\circ$  .

نختار تيارات الشبكة كما هو موضح . فيكون هناك

تيار واحد فقط  $I_1$  في الفرع الذي يحتوي على المصدر .

وبما أنه لا يوجد غير مصدر واحد في الشبكة الكهربائية

فإنه يمكن استخدام نقطة المعاوقة المبركة لحساب  $I_3$  .

$$Z_{input\ 1} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -8 & 0 \\ -8 & 8 + j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j5 & -5 \\ -5 & 7 - j2 \end{vmatrix}} = \frac{315 \angle 16.2^\circ}{45.1 \angle 24.9^\circ} = 6.98 \angle -8.7^\circ \Omega$$

$$I_3 = V_3 / Z_{input\ 1} = (10 \angle 80^\circ) / (6.98 \angle -8.7^\circ) = 1.43 \angle 38.7^\circ \text{ A}$$

وقدرة المصدر الداخلة هي  $14.1 \text{ W} = 10(1.43) \cos 8.7^\circ = P \cdot V_1 I_1 \cos \theta$  والقطرة المماثلة سابقة وتساوي

$$Q = V_1 I_1 \sin 8.7^\circ = 14.3 \text{ VA} \quad \text{والقطرة الظاهرة هي}$$

١٣-٩ الشبكية الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-١٧ أوجد تيارات الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  ولذلك باستخدام معادلات الانتقال بما أن المصدر في المسار المغلق الأول والتيار المطلوب في المسار الثاني. إذن معادلة الانتقال اللازمة هي

$$Z_{\text{transfer 12}} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} = \frac{815/16.2^\circ}{(-1) \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 0 & 7-2j \end{vmatrix}} = \frac{815/16.2^\circ}{21.6/-36^\circ} = 14.48/38.2^\circ \Omega$$

والتيار المطلوب هو

$$I_2 = V_1 / Z_{\text{transfer 12}} = (10/30^\circ) / (14.48/38.2^\circ) = 0.693/-2.2^\circ \text{ A} \quad \text{وبالتالي}$$

$$Z_{\text{transfer 13}} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{13}} = \frac{815/16.2^\circ}{\begin{vmatrix} -8 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{815/16.2^\circ}{16} = 21/16.2^\circ \Omega$$

$$I_3 = V_1 / Z_{\text{transfer 13}} = (10/30^\circ) / (21/16.2^\circ) = 0.476/13.8^\circ \text{ A} \quad \text{و}$$

١٤-٩ الشكل ٩-١٧ أوجد القطرة في مقاومات الشبكة الكهربائية ثم ثابتهما بقطرة المصدر

لدينا من المسائلين ٩-١٢ ، ٩-١٣ :  $I_1 = 0.693/-2.2^\circ \text{ A}$  ،  $I_2 = 0.476/13.8^\circ \text{ A}$  ،  $I_3 = 0.43/38.2^\circ \text{ A}$

والقطرة في المقاومة  $5 \Omega$  هي  $P = (I_2)^2 R = (1.43)^2 5 = 10.2 \text{ W}$  . ويمر في المقاومة  $3 \Omega$  تياران من تيارات الشبكة وعلى ذلك فإن تيار الفرع هو

$$(I_1 - I_2) = (1.115 + j0.895) - (0.693 - j0.027) = 0.422 + j0.922 = 1.01/65.4^\circ \text{ A}$$

$$P = (1.01)^2 3 = 3.06 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

وبالتالي فإن التيار المسار في الفرع الذي يحوى على المقاومة  $5 \Omega$  هو

$$(I_1 - I_2) = (0.693 - j0.027) - (0.462 + j0.113) = 0.231 - j0.140 = 0.271/-31.2^\circ \text{ A}$$

وقدرة هي  $P = (0.271)^2 5 = 0.367 \text{ W}$  . والقطرة في المقاومة  $2 \Omega$  هي  $P = (I_3)^2 2 = (0.476)^2 2 = 0.453 \text{ W}$

والقطرة الكلية للشبكة الكهربائية هي  $P_T = 10.2 + 3.06 + 0.367 + 0.453 = 14.1 \text{ W}$  وهي تساوي القطرة الداخلة في المسألة ٩-١٧ .

١٥-٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-١٨ أوجد جهد  $V_o$  عبر المقاومة  $2 \Omega$  نتيجة لمصدر الجهد  $V_2$

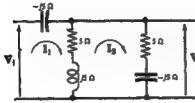
أوجد الجهد  $V_1$  الذي يقابل  $V_o = 5/0^\circ \text{ V}$  .

المصدر الجهد  $V_o$  يكون تيار الشبكة هو  $I_0 = \frac{V_o}{2-j2} = \frac{5/0^\circ}{2\sqrt{2}/-45^\circ} = 1.76/45^\circ \text{ A}$  . وبالصغير مع

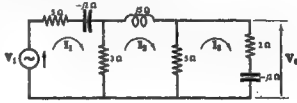
بصيغة محددة :

$$I_0 = \begin{bmatrix} 8-j2 & -3 & V_1 \\ -3 & 8+j5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 8-j2 & -3 & 0 \\ -3 & 8+j5 & -5 \\ 0 & -5 & 7-j2 \end{bmatrix} = V_1 \begin{bmatrix} -3 & 8+j5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = V_1 (0.0476 \angle -16.2^\circ) \text{ A}$$

$$V_1 = \frac{I_1}{0.0476 \angle -16.2^\circ} = \frac{1.76 \angle 45^\circ}{0.0476 \angle -16.2^\circ} = 36.9 \angle 61.2^\circ \text{ V} \quad \text{إذن}$$



شكل ٩-١٩



شكل ٩-١٨

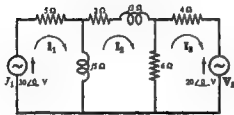
٩-١٩ عند توصيل الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-١٩ بمحمل مقاومته كبيرة فإن الجهد يعطى بالمعطى في الجهد على المقاومة  $5 \angle 5^\circ$  من دالة انتقال الجهد  $V_0/V_1$  الشبكة الكهربائية.  
إن معادلتى تيارى الشبكة الموصفتين في الشكل على الصيغة المصفوية هما

$$\begin{bmatrix} 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والجهد الخارج  $V_0$  هو

$$V_0 = I_2(5-j5) = (5-j5) \begin{bmatrix} 5 & V_1 \\ -(5+j5) & 0 \\ 5 & -(5+j5) \\ -(5+j5) & 10 \end{bmatrix} = \frac{(5-j5)(5+j5)V_1}{(50-j50)} = \frac{50V_1}{50\sqrt{2} \angle -45^\circ}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{50}{50\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 0.707 \angle 45^\circ \quad \text{ومن ثم الجهد}$$



شكل ٩-٢٠

٩-٢٠ يتحدى الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩-٢٠

على مصدرين الجهد - أوجد التيار المار في المقاومة  $2 + j3 \Omega$  نتيجة وجود كل من المصدرين.

نختار تيارات الشبكة بحيث يعطى التيار المطلوب المار في المقاومة بتيار الشبكة  $I_2$  مباشرة. وتكون معادلات تيارات الشبكة المختارة في الصيغة المصفوية هي

$$\begin{bmatrix} 5+j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8+j5 & -4 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \angle 0^\circ \\ 0 \\ -20 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j5 & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 70 + j020 = 824/53.55^\circ$$

محدد الماتريks هي

بذلك محدد البسط التيار  $I_2$  من محلول عناصر المصفوفة الثاني نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30/0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & -6 \\ 0 & -20/0^\circ & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} -j5 & -6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_2} + 0 + (-20/0^\circ)(-)(\frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & -6 \end{vmatrix}}{\Delta_2})$$

$$= -20/0^\circ \left( \frac{50/-90^\circ}{824/53.55^\circ} \right) + 20/0^\circ \left( \frac{49.4/-135^\circ}{824/53.55^\circ} \right) = 2.41/6.45^\circ + 1.36/141.45^\circ \text{ A}$$

وبذلك فإنه ينتج من المصدر  $V_1$  تيار  $2.41/6.45^\circ \text{ A}$  في المقاومة  $2 + j3 \Omega$  ، وينتج من المصدر  $V_2$  تيار  $1.36/141.45^\circ \text{ A}$  في نفس المقاومة . وينتج من ذلك أن هاتين التيارين هما مركبتا  $I_2$

$$I_2 = 2.41 \angle 6.45^\circ + 1.36 \angle 141.45^\circ = 1.74 \angle 49.1^\circ \text{ A}$$

٩ - ١٨ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٧ عين (أ) القدرة الممتصة بكل مصدر جهد .  
(ب) القدرة في مقاومات الشبكة .

(أ) التيار المار في الفرع الذي يحتوي على  $V_1$  هو

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 30/0^\circ & -j5 & 0 \\ 0 & 8 + j8 & -6 \\ -20/0^\circ & -6 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_1} = \frac{2240/53.9^\circ}{824/53.55^\circ} = 2.72/-82.78^\circ \text{ A}$$

والقدرة الممتصة لهذا المصدر هي  $P_1 = V_1 I_1 \cos \theta = 30(2.72) \cos 29.75^\circ = 93.5 \text{ W}$

التيار المار في الفرع الذي يحتوي على  $V_2$  هو

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 & 30/0^\circ \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & -6 & -20/0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_2} = \frac{800/-125.6^\circ}{824/53.55^\circ} = 1.38/-209.15^\circ \text{ A}$$

لاحظ أن  $V_2$  و  $I_2$  ليس في اتجاه واحد . وعلى هذا فإن القدرة الممتصة لهذا المصدر هي

$$P_2 = V_2(I_2) \cos \theta = -(20)(1.38) \cos -209.15^\circ = -24.1 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي  $P_T = P_1 + P_2 = 93.5 + 24.1 = 117.6 \text{ W}$

(ب) - القدرة في المقاومة  $5 \Omega$  هي  $P_3 = (I_1)^2 R = (3.59)^2 5 = 64.5 \text{ W}$  وفي المقاومة  $2 \Omega$  هي

$$6 \Omega \text{ هي } P_4 = (I_2)^2 R = (1.74)^2 6 = 6.05 \text{ W}$$

وأيضاً أن التيار المار في فرع المقاومة  $6 \Omega$  هو  $(I_2 - I_1) = (1.33 + j1.12) - (-1.205 + j0.672) = 2.535 + j0.45 = 2.57 \angle 10.1^\circ \text{ A}$

إذن  $P_5 = (2.57)^2 6 = 39.6 \text{ W}$  . والقدرة في المقاومة  $4 \Omega$  هي  $P_6 = (I_2)^2 R = (1.38)^2 4 = 7.61 \text{ W}$

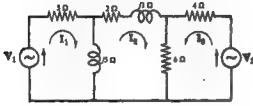
إذن القدرة الكلية هي  $P_T = 64.5 + 6.05 + 39.6 + 7.61 = 117.76 \text{ W}$



٩ - ١٩ تحتوي الشبكة الكهربية الموضحة في الشكل ٩ - ٢١ على مصدرين الجهد  $V_1$  و  $V_2$  فإذا كان  $V_1 = 30 \angle 0^\circ V$  فبين  $V_2$  بحيث يكون التيار المار في المقاومة  $2 + j3 \Omega$  مساوياً للصفر .

تختار تيارات الشبكة كما هو موضح ويبحث يمر في المقاومة  $2 + j3 \Omega$  تيار واحد فقط . وبذلك فإن المعادلات الناتجة في الصيغة المصفوفية هي :

$$\begin{bmatrix} 5 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 8 + j8 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \angle 0^\circ \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



شكل ٩ - ٢١

ومنها نجد أن :

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 30 \angle 0^\circ & 0 \\ -j5 & 0 & 6 \\ 0 & V_2 & 10 \end{vmatrix}}{\Delta_n} = 0$$

وبالتركيب نحصل على :

$$-30 \angle 0^\circ \begin{vmatrix} -j5 & 6 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} - V_2 \begin{vmatrix} 5 + j5 & 0 \\ -j5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30 \angle 0^\circ (50 \angle -90^\circ) - V_2 (6)(5\sqrt{2} \angle 45^\circ) = 0$$

$$V_2 = \frac{-30 \angle 0^\circ (50 \angle -90^\circ)}{6(5\sqrt{2} \angle 45^\circ)} = 35.4 \angle 45^\circ V$$

حاصل آخر : إذا كان لا يمر تيار في الفرع  $2 + j3 \Omega$  أي أن  $I_2$  يساوى صفراً فإن المعطى في الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  يساوى المعطى في الجهد على المقاومة  $6 \Omega$  ، أي أن

$$I_1(5) = I_2(6)$$

$$I_2 = V_2/10, \text{ و } I_1 = 30 \angle 0^\circ / (5 + j5)$$

$$V_2 = \frac{30 \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} \left( \frac{10}{6} \right) = 35.4 \angle 45^\circ V \text{ ومنها نجد : } \frac{30 \angle 0^\circ}{5 + j5} (5) = \frac{V_2}{10} (6)$$

٩ - ٢٠ إذا كان في الشكل ٩ - ٢١  $V_2 = 20 \angle 0^\circ V$  ، عين مصدر الجهد  $V_1$  الذي ينتج عنه عدم مرور تيار في الفرع الموصى على  $V_2$  .

يختار تيارات الشبكة الموضحة في الشكل ٩ - ١٩ ومساواة عمدة  $I_3$  بالصفر فإن :

$$I_3 = \frac{\begin{bmatrix} 5 + j5 & -j5 & V_1 \\ -j5 & 8 + j8 & 0 \\ 0 & 6 & 20 \angle 0^\circ \end{bmatrix}}{\Delta_n} = 0$$

وبالفعل نحصل على :

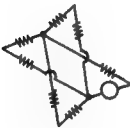
$$V_1 \begin{vmatrix} -j5 & 8 + j8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \frac{20 \angle 90^\circ}{-j5} \begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 8 + j8 \end{vmatrix} = 0$$

$$V_1 (20 \angle -90^\circ) + \frac{20 \angle 90^\circ (35 + j80)}{-j5} = 0$$

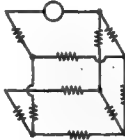
$$V_1 = \frac{-20 \angle 90^\circ (35 + j80)}{20 \angle -90^\circ} = 85 - j17.4 \text{ V}$$

### مسائل التمرين

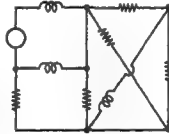
١ - ٢١ من عدد تيارات الدببكة اللازمة لحل الشبكات الكهربائية الموضحة في الشكل ٩ - ٢٢ (أ - د) وذلك بتطبيق طرقتين مختلفتين .  
الجواب : (أ) 5 ، (ب) 4 ، (ج) 3 ، (د) 4 ، (هـ) 4 ، (و) 5



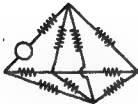
(أ)



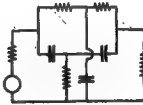
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

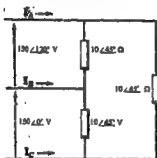


(و)

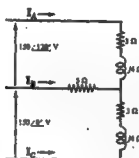
شكل ٩ - ٢٢

٢٢-٩ أوجد التيار المار في المقاومة  $3\Omega$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٣-٩ علماً بأن الاتجاه الموجب كما هو موضح في الشكل .

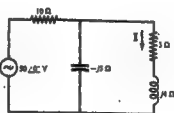
الجواب :  $4.47 \angle -63.4^\circ \text{ A}$



شكل ٢٢-٩



شكل ٢٤-٩



شكل ٢٣-٩

٢٣-٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٤-٩ أوجد التيارات  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$

الجواب :  $I_A = 12 \angle 46.4^\circ \text{ A}$ ,  $I_B = 19 \angle -47.1^\circ \text{ A}$ ,  $I_C = 22 \angle 166.4^\circ \text{ A}$

٢٤-٩ في الشكل ٢٥-٩ أوجد التيارات الثلاث  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$

الجواب :  $26 \angle 45^\circ \text{ A}$ ,  $26 \angle -75^\circ \text{ A}$ ,  $26 \angle -195^\circ \text{ A}$

٢٥-٩ باستخدام طرق تيار الشبيكة - أوجد الجهد  $V_{AB}$  في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٦-٩ .

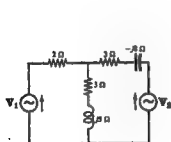
الجواب :  $V_{AB} = 75.4 \angle 35.2^\circ \text{ V}$

٢٩-٩ في الشكل ٢٧-٩ - أوجد القدرة الممتصة لمصدر الجهد  $V$  الذي يملأ قدرة  $100 \text{ W}$  في المقاومة  $5\Omega$  .

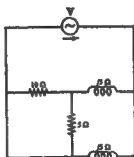
الجواب :  $40.3 \text{ V}$

٢٧-٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٨-٩ احسب  $\Delta$  وذلك بفرض اختيار مالتيارات الشبيكة . احسب اختياراً آخر لتيارات الشبيكة - ثم احسب مرة أخرى  $\Delta$  .

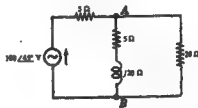
الجواب :  $61 - f 15 \Omega^2$



شكل ٢٨-٩



شكل ٢٧-٩



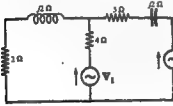
شكل ٢٦-٩

٢٨-٩ إذا كان كل من  $V_1$  و  $V_2$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٢٨-٩ يساوي  $50\angle 0^\circ$  V ، ما القدرة التي يعطيها كل منها لشبكة ؟ كرر نفس الشيء مع عكس اتجاه مصدر  $V_2$  .

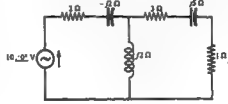
الجواب :  $P_1 = 191$  W,  $P_2 = 77.1$  W ;  $P_1 = 327$  W,  $P_2 = 214$  W

٢٩-٩ في الشبكتين الفرعيتين لشبكة الموضحة في الشكل ٢٩-٩ أوجد القدرة التي يعطيها المصدر وكذلك قدرة كل مقاومة في الشبكة .

الجواب :  $P = 36.7$  W,  $P_1 = 2.22$  W,  $P_2 = 27.8$  W,  $P_3 = 6.66$  W



شكل ٢٨-٩



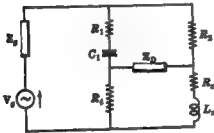
شكل ٢٩-٩

٣٠-٩ إذا كان  $V_1$  و  $V_2$  مصدرين متماثلين قيمة كل منهما  $10\angle 90^\circ$  volts ، وموجّهين كما هو موضح في رسم الدائرة - أوجد القدرة التي يعطيها كل مصدر للدائرة .

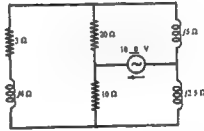
الجواب :  $P_1 = 11.0$  W,  $P_2 = 9.34$  W

٣١-٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٣١-٩ - أوجد التيار المار في المقاومة  $3 + j4 \Omega$  .

الجواب : صفر



شكل ٣٢-٩



شكل ٣١-٩

٣٢-٩ تسمى الدائرة الموضحة في الشكل ٣٢-٩ بقنطرة هاي - اكتب معادلات تيارات الشبكة في الصيغة المصفوية بحيث تختار تيارا واحدا فقط يمر في  $Z_D$  ، ثم عبر عن التيار المار في  $Z_D$  على صيغة محددة مساويا بالصفر .

أوجد  $R_x$  و  $L_x$  بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة .

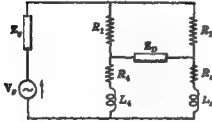
$$R_x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}, \quad L_x = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} \quad \text{الجواب}$$

٣٣-٩ تسمى الدائرة الموضحة في الشكل ٣٣-٩ بقنطرة اون . أوجد  $R_x$  و  $L_x$  بدلالة الثوابت الأخرى للقنطرة ، وذلك عندما يكون التيار في  $Z_D$  مساويا للصفر .

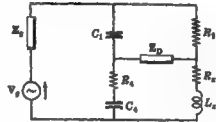
$$R_x = \frac{C_1}{C_4} R_2, \quad L_x = C_1 R_2 R_4 \quad \text{الجواب}$$

٣٤ - الدائرة الموضحة في الشكل ٣٤-٩ هي قنطرة المقارنة بين حث الملفات المختلفة . اختر تيارات الشبكة ثم اكتب معادلاتها في الصيغة المصفوية . أوجد  $R_2$  و  $L_2$  عندما يكون التيار في  $Z_D$  مساوياً للصفر .

$$R_2 = \frac{R_1}{R_4} R_6 \quad L_2 = \frac{R_2}{R_1} L_4 \quad \text{الجواب}$$

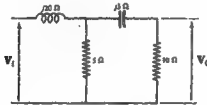


شكل ٩ - ٣٤

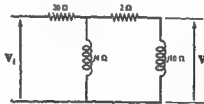


شكل ٩ - ٣٥

٣٥ - أوجد دالة انتقال الجهد  $V_o/V_i$  عبر الشبكة الموضحة في الشكل ٣٥-٩ . الجواب :  $0.139 \angle 90^\circ$



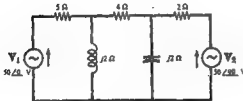
شكل ٩ - ٣٦



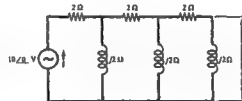
شكل ٩ - ٣٧

٣٦ - أوجد دالة انتقال الجهد  $V_o/V_i$  عبر الشبكة الموضحة في الشكل ٣٦-٩ . الجواب :  $0.159 \angle -61.4^\circ$

٣٧ - في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٧-٩ ، أوجد  $V_o$  بالقانونية الموضحة . الجواب :  $1.56 \angle 128.7^\circ \text{ V}$



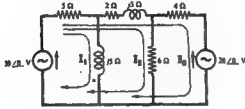
شكل ٩ - ٣٨



شكل ٩ - ٣٩

٣٩ - أوجد القدرة في كل من المقارنات الثلاث في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٩-٩ .

الجواب : 471 W, 47.1 W, 471 W



شكل ٣٩ - ٩

٣٨ - ٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٣٨ - ٩ أوجد القدرة الممتصة بكل مصدر جهد .

الجواب :  $P_1 \approx 422 \text{ W}, P_2 \approx 565 \text{ W}$

٤٠ - ٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٣٩ - ٩ أوجد تيار الشبكة الفرعية  $I_2$  وذلك لاختيار تيارات الشبكة المعطى .

الجواب :  $1.38 / -209.15^\circ \text{ A}$

الجواب :  $11.6 / 113.2^\circ \text{ A}$

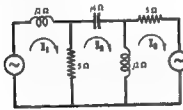
٤١ - ٩ أوجد التيار  $I_2$  في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٠ - ٩ .

الجواب :  $3.3 / -$

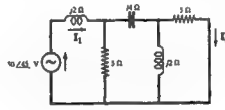
٤٢ - ٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٠ - ٩ أوجد نسبة التيار  $I_1/I_2$  .

٤٣ - ٩ في الشبكة المطابقة بالشكل ٤١ - ٩ ، موضح بها تيارات الشبكة الثلاثة في المسارات المثلثة الأولى . احسب معاوقة الانتقال  $Z_{12}$  و  $Z_{21}$

الجواب :  $4.3 / -68.2^\circ \Omega$



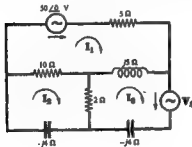
شكل ٤١ - ٩



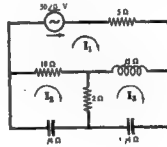
شكل ٤٢ - ٩

٤٤ - ٩ تيارات الشبكات الفرعية الثلاث للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٢ - ٩ أوجد المعاوقات  $Z_{12}$  و  $Z_{21}$  و  $Z_{input}$

الجواب :  $20.2 / 36.1^\circ \Omega, 17.4 / 71.6^\circ \Omega, 6.82 / -82.9^\circ \Omega$



شكل ٤٣ - ٩

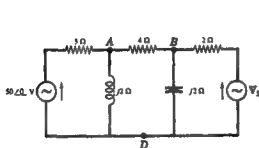


شكل ٤٤ - ٩

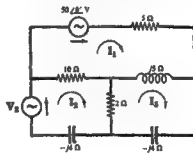
٤٥ - ٩ الشكل ٤٣ - ٩ هو الشكل ٤٢ - ٩ بعد إضافة مصدر الجهد  $V_3$  . أوجد قيمة  $V_3$  التي تجعل التيار  $I_1$  مساوياً للصفر .

الجواب :  $16.8 / 133.2^\circ \text{ V}$

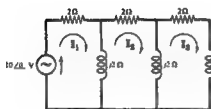
٤٩-٩ الشكل ٤٤-٩ هو الشكل ٤٢-٩ بعد إضافة مصدر الجهد  $V_2$ . أوجد قيمة  $V_2$  التي تجعل التيار  $I_1$  مساويا للصفر. الجواب :  $42.9/144.5^\circ V$



شكل ٤٥-٩



شكل ٤٤-٩



شكل ٤٦-٩

٤٧-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٥-٩ أوجد قيمة  $V_2$  التي تجعل التيار المار خلال المقاومة  $4\Omega$  مساويا للصفر. الجواب :  $26.3/113.2^\circ V$

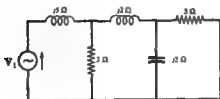
٤٨-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٥-٩ أوجد قيمتي  $V_{BD}$  و  $V_{AD}$  عندما تكون قيمة  $V_3 = 26.3/113.2^\circ \text{ volts}$ .

الجواب :  $V_{AD} = V_{BD} = 18.5/68.1^\circ V$

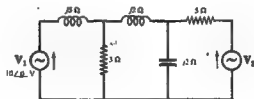
٤٩-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٦-٩ ولاختيار تيارات الشبكة الموضح - أوجد معاوقة الانتقال  $Z_{12}$  ثم أوجد  $I_3$  باستخدام معاوقة الانتقال هذه. الجواب :  $12.8/38.7^\circ \Omega, 0.782/38.7^\circ \Omega$

٥٠-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٧-٩ أوجد قيمة  $V_2$  التي تجعل تيار المصدر  $V_3$  مساويا للصفر. الجواب :  $V_2 = 4/180^\circ V$

٥١-٩ في الشبكة الموضحة في الشكل ٤٨-٩ أوجد مقدار مصدر الجهد  $V_1$  الذي ينتج عنه قيمة فعالة للجهد عبر المقاومة  $5\Omega$  مساوية  $20 \text{ volts}$ . الجواب :  $69.1 V$



شكل ٤٨-٩



شكل ٤٧-٩

## الفصل العاشر

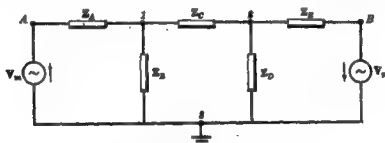
### تحليل الشبكات بطريقة جهد العقدة

#### مقدمة :

استعرضنا في الفصل التاسع طريقة اختيار مسارات التيار المخلقة وتطبيق قانون كيرشوف للجهد ، وذلك لحل الشبكات الكهربائية بطريقة تيارات الشبكات الفرعية . وفي هذا الفصل سنحصل حل نفس الحل من طريقة مجموعة المعادلات الناتجة من تطبيق قانون كيرشوف للتيار . وتسمى هذه بطريقة جهد العقدة .

#### جهود العقدة :

العقدة هي نقطة مشتركة في الشبكة الكهربائية لمتصلين أو أكثر من عناصر الدائرة . وإذا اتصل ثلاثة عناصر أو أكثر عند عقدة ما ، فإن هذه العقدة ، تسمى بالعقدة الأساسية أو بنقطة اتصال . ويرمز لكل عقدة في الدائرة بعدد أو بحرف . وفي الشكل ١-١٠ نجد أن 1, 2, 3 و A, B ترز إلى عقدة ويرمز 1, 2, 3 إلى عقدة أساسية أو فقط اتصال . وجه العقدة هو جهد عقدة مفروضة بالنسبة لعقدة معينة تسمى عقدة الإسناد . وفي الشكل ١-١٠ إذا اخترنا العقدة 3 كعقدة اسناد ، فإن  $V_{13}$  يمثل الجهد بين العقدة 1 و 3 ،  $V_{23}$  يمثل الجهد بين العقدة 2 و 3 . وبما أن جهد العقدة يحدد دائماً بالنسبة لعقدة الإسناد فإننا نستخدم الرموز  $V_1$  و  $V_2$  بدلا من  $V_{13}$  و  $V_{23}$  على الترتيب .



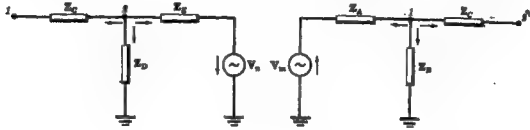
شكل ١-١٠ عقد الشبكة الكهربائية

وتعتمد طريقة جهد العقدة على إيجاد كل جهود العقد الأساسية بالنسبة لعقدة الإسناد . وتطبيق قانون كيرشوف للتيار على نقاط الاتصال 1 و 2 . فإننا نحصل حل معادلتين في المجهولين  $V_1$  و  $V_2$  . وفي الشكل ١-١٠ أعيد رسم العقدة 1 مع توضيح جميع الأفرع المتصلة بها ، ونفرض أن كل تيارات الأفرع خارجة من العقدة ، وبما أن مجموع التيارات الخارجة من نقطة اتصال يساوي صفراً فإن :

$$(١) \quad \frac{V_1 - V_A}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_D} + \frac{V_1 - V_2}{Z_C} = 0$$



واتجاه التيارات في المادة (١) اتجاه اختياري . أنظر المسألة ١٠-١ .



شكل ١٠ - ٢

شكل ١٠ - ٢

وبتكرار نفس الطريقة للعقدة 2 تكون المادة الناتجة هي :

$$(٢) \quad \frac{V_1 - V_2}{Z_C} + \frac{V_2}{Z_D} + \frac{V_2 + V_n}{Z_B} = 0$$

وبترتيب الحدود في المعادلتين (١) ، (٢) فإن مجموعة المعادلتين تكون

$$(٢) \quad \left( \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} \right) V_1 - \left( \frac{1}{Z_C} \right) V_2 = \left( \frac{1}{Z_A} \right) V_n$$

$$-\left( \frac{1}{Z_C} \right) V_1 + \left( \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_D} + \frac{1}{Z_B} \right) V_2 = -\left( \frac{1}{Z_B} \right) V_n$$

وبما أن  $1/Z = Y$  ، فإن مجموعة المعادلات (٢) يمكن إعادة كتابتها بالنسبة للمساومات كالآتي :

$$(٤) \quad (Y_A + Y_B + Y_C)V_1 - Y_C V_2 = Y_A V_n$$

$$-Y_C V_1 + (Y_C + Y_D + Y_B)V_2 = -Y_B V_n$$

### عدد معادلات جهد العقدة :

باستثناء عقدة الإسناد فإنه يمكننا كتابة المعادلات عند كل عقدة أساسية في الشبكة الكهربائية . وعل ذلك فإن عدد المعادلات المطلوبة يكون أقل من عدد العقد الأساسية بواحد . ويعتمد اختيار الطريقة الأنسب من بين طريقتي تيار الشبكة وجهد العقدة على شبكة كهربائية مطاة على تركيب الشبكة نفسها . وإذا كانت الشبكة الكهربائية تحتوي على عدة أفرع متصلة على التوازي فيكون لها عدد من المسارات المغلقة أكثر من عدد العقد ، ولذلك فهي تحتاج عدداً أقل من معادلات العقدة لحلها . أنظر المسألة ٩-١ في الفصل التاسع والمسألة ١٠-٤ . وفي حالات أخرى يكون عدد المسارات المغلقة مساوياً لعدد العقد أو يكون عدد العقد أكبر من عدد المسارات المغلقة وعل ذلك فإنه يجب حل كل شبكة كهربائية بالطريقة التي تعطينا أقل عدد من المعادلات .

### معادلات العقد من طريق الفحص :

تحتاج الشبكة الكهربائية التي بها أربع عقد أساسية إلى ثلاث معادلات عقد لحلها وهذه المعادلات تكتب عموماً بالصيغة :

$$(٥) \quad Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 = I_1$$

$$Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 = I_2$$

$$Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 = I_3$$

وتسمى  $Y_{11}$  بالمساحة الذاتية للمدة 1 ، وتطلى بمجموع جميع المساحات المتصلة بالمدة 1 . وبالمثل تسمى  $Y_{22}$  و  $Y_{33}$  بالمساحتين الذاتيتين للمدتين 2 و 3 ، وتطلىان بمجموع جميع المساحات المتصلة بالمدة المقابلة لكل منهما .

تسمى  $Y_{12}$  بالمساحة التبادلية بين المدةتين 1 و 2 وتطلى بمجموع كل المساحات المتصلة بالمدةتين 1 و 2 .  $Y_{23}$  لها إشارة سالبة كما هو واضح من المعادلة الأولى من (٤) . وبالمثل فإن  $Y_{13}$  و  $Y_{23}$  هما المساحتان التبادليتان للعناصر المتصلة بالمدةتين (2 و 3) ، (1 و 3) على الترتيب . وكل المساحات التبادلية لها إشارات سالبة . لاحظ أن

$$Y_{12} = Y_{21}, Y_{23} = Y_{32}$$

$I_1$  هو مجموع كل تيارات المصدر عند المدة 1 . وإشارة التيار الداخلى إلى المدة موجبة بينما إشارة التيار الخارج من المدة سالبة .  $I_2$  و  $I_3$  هما مجموعا التيارات عند المدةتين 2 و 3 على الترتيب .

وكا في الصيغة المصفوفية لمعادلات تيار الشبكة ( الفصل التاسع ) فإن معادلات المدة الثلاث في ( ٥ ) تكتب بالصيغة المصفوفية .

$$(٦) \quad \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

وتطلى جهود المدة  $V_1$  ،  $V_2$  ،  $V_3$  بالمعادلات :

$$V_1 = \frac{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & I_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & I_2 \\ Y_{31} & Y_{32} & I_3 \end{bmatrix}}{\Delta_Y}, \quad V_2 = \frac{\begin{bmatrix} Y_{11} & I_1 & Y_{12} \\ Y_{21} & I_2 & Y_{22} \\ Y_{31} & I_3 & Y_{32} \end{bmatrix}}{\Delta_Y}, \quad V_3 = \frac{\begin{bmatrix} I_1 & Y_{12} & Y_{13} \\ I_2 & Y_{22} & Y_{23} \\ I_3 & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}}{\Delta_Y}$$

وعند ذلك محددة كل بسط بالنسبة لعناصر المصفوف المصفوى على التيار فإننا نحصل على معادلات جهود المدة الآتية :

$$(٧) \quad V_1 = I_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta_Y} \right)$$

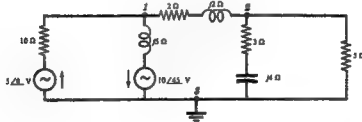
$$(٨) \quad V_2 = I_1 \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left( \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left( \frac{\Delta_{32}}{\Delta_Y} \right)$$

$$(٩) \quad V_3 = I_1 \left( \frac{\Delta_{13}}{\Delta_Y} \right) + I_2 \left( \frac{\Delta_{23}}{\Delta_Y} \right) + I_3 \left( \frac{\Delta_{33}}{\Delta_Y} \right)$$

وسنورد الأطراف اليمنى في المعادلات (٧) ، (٨) ، (٩) هي المركبات المطورة الناتجة من التيارات المختلفة .  
وعلى ذلك ففي المعادلة (٧) نجد أن  $V_1$  هو مجموع  $I_1(\Delta_{11}/\Delta_Y)$  الناتج من التيار  $I_1$  و  $I_2(\Delta_{21}/\Delta_Y)$  الناتج من التيار  $I_2$  و  $I_3(\Delta_{31}/\Delta_Y)$  الناتج من التيار  $I_3$

### مثال :

اكتب معادلات جهد العقدة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية .



شكل ١٠ - ١

نختار العقدة 3 عقدة اسناد والمفتتين 1 و 2 كما هو موضح في شكل الدائرة ونفرض أن تيارات كل الأفرع خارجة من المفتتين 1 و 2 . وبطبيق كيرشوف التيار عند كل عقدة نحصل على :

$$(١٠) \quad \text{عند العقدة 1 : } \frac{V_1 - 5\angle 0^\circ}{10} + \frac{V_1 + 10\angle 45^\circ}{j5} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j5} = 0$$

$$(١١) \quad \text{عند العقدة 2 : } \frac{V_2 - V_1}{2 + j5} + \frac{V_2}{3 - j4} + \frac{V_2}{5} = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$(١٢) \quad \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j5}\right)V_1 - \left(\frac{1}{2 + j5}\right)V_2 = \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5}$$

$$(١٣) \quad -\left(\frac{1}{2 + j5}\right)V_1 + \left(\frac{1}{3 + j5} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5}\right)V_2 = 0$$

بمقارنة المصفوفة المربعة التي تحتوي على المساحة  $Y_{11}$  بالمعادلة (١٢) نجد أن  $Y_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j5)$  siemens وهذا يؤكد تعريف  $Y_{11}$  كساعة ذاتية للعقدة . ونجد أيضاً أن  $Y_{12} = Y_{21} = -1/(2 + j5)$  siemens . تتفق مع تعريف المساحة المتبادلية .

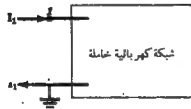
يعرف  $I_1$  عموماً بأنه مجموع التيارات عند العقدة 1 . وعلى حسب اختيار الإشارات لأن التيار الناتج عن مصدر الفرع الأيسر ينتج إلى العقدة 1 وعلى ذلك فإن إشارته موجبة ، بينما يخرج التيار الناتج عن مصدر الفرع الثاني من العقدة 1 وعلى ذلك فإن إشارته سالبة . إذن  $I_1 = (5\angle 0^\circ)/10 - (10\angle 45^\circ)/j5$  amperes . والتيار  $I_2$  عند العقدة 2 يساوي صفر لعدم وجود أي مصدر في الأفرع المتصلة بالعقدة 2

### المساحة المحركة :

أعتبر الشبكة الكهربائية الملاملة ذات النهايتين الخارجيتين والموضحة في الشكل ١٠-٢ . افترض أن تيار المصدر ينتج إلى العقدة 1 وأن أي مساحة متصلة بالمصدر هي داخل الشبكة الكهربائية .

بما أنه لا يوجد أي مصدر آخر لتيار داخلى للشبكة الكهربائية فإن

$$(١٤) \quad V_1 = I_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta v} \right) \quad \text{حيث :}$$



شكل ١٠ - ٢

وتعرف المساحة المحركة أو  $Y_{input}$  بأنها النسبة بين التيار الخارج من مصدر التيار الوحيد الموجود بين عقدتين والمهرب في الجهد الناتج بين العقدتين . إذن من المعادلة (١٤) نجد أن

$$Y_{input 1} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{11}}$$

وتعرف مساحة التحويل لشبكة كهربائية حرة بأنها المساحة التي تعطينا لنا الشبكة الكهربائية من خلال نهايتين محددتين وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر . إذن :

$$V_1 = I_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta Y} \right) + (0) \left( \frac{\Delta_{21}}{\Delta Y} \right) + (0) \left( \frac{\Delta_{31}}{\Delta Y} \right) + \dots = I_1 \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta Y} \right)$$

$$Y_{input 1} = I_1 / V_1 = \Delta Y / \Delta_{11} \quad \text{أو}$$

وعلى ذلك فإن تعريف  $Y_{input}$  يطبق للشبكات الكهربائية اللينة والصلبة .

### مساحة الانتقال :

تنتج عن التيار المسار عند عقدة ما في الشبكة الكهربائية جهود عند كل العقدة بالنسبة لعقدة الإسناد . وعلى ذلك فإن مساحة الانتقال هي النسبة بين التيار المسار عند عقدة ما والجهد الناتج عند عقدة أخرى مع فرض أن جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٦ ، يعطى التيار  $I_r$  عند العقدة  $r$  والجهد الناتج عند العقدة  $s$  بالمعادلة .

$$\begin{aligned} V_s \quad V_r &= (0) \left( \frac{\Delta_{1s}}{\Delta Y} \right) + \dots + I_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta Y} \right) + \dots + (0) \left( \frac{\Delta_{ns}}{\Delta Y} \right) \\ &= I_r \left( \frac{\Delta_{rs}}{\Delta Y} \right) \end{aligned}$$

شكل ١٠ - ٦

$$Y_{transfer rs} = I_r / V_s = \Delta Y / \Delta_{rs} \quad \text{إذن}$$

لاحظ أننا اخترنا نقطة رجوع التيار كمعقدة إسناد . وهذا الاختيار ضروري وإلا فإن التيار سيظهر في أكثر من حد في معادلة  $V_s$  وبذلك يكون تعريف  $Y_{transfer}$  غير صحيح .

باستخدام المساحة المحركة ومساحة الانتقال نحصل على مجموعة المعادلات الآتية للجهود  $V_1$  و  $V_2$  و  $V_3$  لشبكة كهربائية ذات أربع نقاط اتصال .

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input 1}} + \frac{I_2}{Y_{transfer 21}} + \frac{I_3}{Y_{transfer 31}}$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{transfer 12}} + \frac{I_2}{Y_{input 2}} + \frac{I_3}{Y_{transfer 32}}$$

$$V_3 = \frac{I_1}{Y_{transfer 13}} + \frac{I_2}{Y_{transfer 23}} + \frac{I_3}{Y_{input 3}}$$

ويظهر بوضوح تماثل مساحة الداخلة ومساحة الانتقال عندما يؤثر مصدر واحد التيار في الشبكة الكهربائية مع وضع المصادر الأخرى مساوية للصفر .

## تمثيل مسائل بمحاولة

١-١٠ اكتب معادلات العقدة 2 الموضحة في الشكلين ١-١٠ (أ) ، ١-١٠ (ب) .  
 بما أن كل التيارات في الشكل ١-١٠ (أ) خارجة من العقدة 2 ، فبمساراة مجموع التيارات الخارجة من العقدة بالصفر نجد أن

$$(V_2 - V_1)/2 + V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/5 = 0$$

$$\text{وبإعادة ترتيب الحدود نجد} \quad -(1/2)V_1 + (1/2 + 1/10 + 1/5)V_2 = -10\angle 0^\circ/5$$

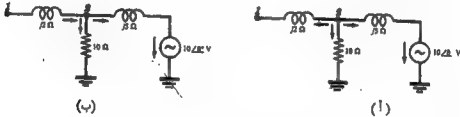
في الشكل ١-١٠ (ب) نجد أن تيار فرع واحد فقط يدخل إلى العقدة 2 بينما يخرج منها تياران وبوضع التيار الداخل إلى العقدة مساوياً لمجموع التيارين الخارجين منها نجد أن :

$$(V_2 - V_1)/2 = V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/5$$

$$\text{وبإعادة ترتيب الحدود نجد} \quad V_2/10 + (V_2 + 10\angle 0^\circ)/5 + (V_1 - V_2)/2 = 0$$

$$\text{أو} \quad -(1/2)V_1 + (1/2 + 1/10 + 1/5)V_2 = -10\angle 0^\circ/5$$

وكل ذلك لأنه يمكننا اختيار أي اتجاه لتيارات الأفرع عند كتابة معادلات العقدة . وفي كل حالة متكون المعادلات الناتجة متطابقة .



شكل ١٠ - ٧

١-١٠ اكتب معادلات العقدة لشبكة الكهربية الموضحة في الشكل ١-١٠ . ثم عبر عنها بالصيغة المصفوفية .

لدينا ثلاث عقد مرققة وكذلك عقدة الإسناد كما هو موضح في الشكل . بفرض أن تيارات جميع الأفرع خارجة من العقد فإنه يمكننا كتابة المعادلات التالية عند العقد 1 و 2 و 3 .

$$(V_1 - V_2)/(-j8) + V_1/5 + (V_1 - V_2 + 10\angle 0^\circ)/(8 + j4) = 0$$

$$(V_2 - V_1)/(-j8) + V_2/10 + (V_2 - V_3 - 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

$$V_3/8 + (V_3 - V_1 - 10\angle 0^\circ)/(8 + j4) + (V_3 - V_2 + 5\angle 0^\circ)/(j4) = 0$$

وبإعادة ترتيب الحدود نحصل على

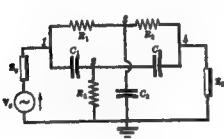
$$\left(-\frac{1}{-j8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8 + j4}\right)V_1 - \left(\frac{1}{-j8}\right)V_2 - \left(\frac{1}{8 + j4}\right)V_3 = (-10\angle 0^\circ)/(8 + j4)$$

$$-\left(\frac{1}{-j8}\right)V_1 + \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right)V_2 - \left(\frac{1}{j4}\right)V_3 = (5\angle 0^\circ)/(j4)$$

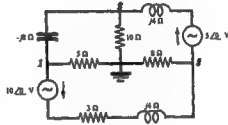
$$-\left(\frac{1}{8 + j4}\right)V_1 - \left(\frac{1}{j4}\right)V_2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{8 + j4}\right)V_3 = \left(\frac{10\angle 0^\circ}{8 + j4}\right) - \left(\frac{5\angle 0^\circ}{j4}\right)$$

ومعادلات العقد في الصيغة المصفوية هي

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8+j4}\right) & -\left(\frac{1}{-j8}\right) & -\left(\frac{1}{8+j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{-j8}\right) & \left(\frac{1}{-j8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) \\ -\left(\frac{1}{8+j4}\right) & -\left(\frac{1}{j4}\right) & \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{8+j4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{10/0^\circ}{8+j4}\right) \\ \left(\frac{6/0^\circ}{j4}\right) \\ \left(\frac{10/0^\circ}{8+j4} - \frac{6/0^\circ}{j4}\right) \end{bmatrix}$$



شكل ١٠ - ٩



شكل ١٠ - ٨

١٠-٩ أكتب عن طريق الفحص معادلات العقد بالصيغة المصفوية للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٩ .

نختار العقد كما هو موضح في الشكل . في [Y] نجد أن  $Y_{11}$  هي مجموع جميع المساحات المتصلة بالعقد ١ ، أي  $Y_{11} = (1/Z_{C_1} + 1/R_1 + j\omega C_1)$  ،  $Y_{12}$  و  $Y_{21}$  هما سالب مجموع الساعات بالمقدارين (١ و ٢) و (١ و ٣) ، أي أن  $Y_{12} = -(1/R_1)$  ،  $Y_{13} = -(j\omega C_1)$  ، ويمكن تحديد الحدود الأخرى في [Y] بطريقة مألوفة .

هناك تيار واحد فقط مار في الشبكة الكهربائية ونتجه لخاصية العقدة ١ وعلى ذلك لإشارته موجبة . أي أن

$$-I_1 = V_1/Z_y$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega C_1\right) & -(j\omega C_1) & -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 \\ -(j\omega C_1) & \left(j\omega C_1 + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right) & 0 & -(j\omega C_2) \\ -\left(\frac{1}{R_1}\right) & 0 & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ 0 & -(j\omega C_2) & -\left(\frac{1}{R_2}\right) & \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_s/Z_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

١٠-٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٩ وضعت قيم المكثفين المتساويين في السعة  $C$  فاراد وقيمة المقاومة  $R$  بحيث كان التيار المار في المعلقة  $Z_D$  مساوياً للصفر . تحت هذا الشرط عين قيم  $R_{eq}$  و  $Z_{eq}$  بدلالة الثوابت الأخرى للنائرة .

نختار العقد كما هو موضح في الشكل . ملاحظة عقدة الإسناد في طرف ما المعلقة  $Z_D$  فإن جهد العقدة  $V_3$  يساوي صفراً وبذلك يكون التيار المار في المعلقة  $Z_D$  مساوياً للصفر . وبكتابة معادلات العقد في الصيغة المصفوية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1}\right) & -(j\omega C) & -\left(\frac{1}{R_1}\right) \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2}\right) & -(j\omega C) \\ -\left(\frac{1}{R_1}\right) & -(j\omega C) & \left(j\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_D}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_p/R_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

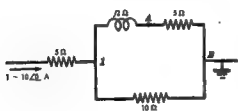
و بالتعبير عن  $V_3$  بصيغة معدلة ومساوئها بالصفر :

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1}\right) & -(j\omega C) & V_p/R_2 \\ -(j\omega C) & \left(j2\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2}\right) & 0 \\ -\left(\frac{1}{R_1}\right) & -(j\omega C) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_T} = 0$$

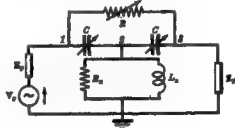
إذاً عند البسط يساوى صفراً وبذلك بالنسبة لعناصر المود الثالث نحصل على :

$$\begin{aligned} (V_p/R_2) \begin{vmatrix} -j\omega C & (j2\omega C + 1/R_2 + 1/j\omega L_2) \\ -1/R_1 & -j\omega C \end{vmatrix} &= 0 \\ -j\omega C^2 + j2\omega C/R_2 + 1/(R_2 R_1) + 1/(j\omega L_2 R_1) &= 0 \quad \text{إذاً} \\ L_2 = 1/(2\omega^2 C) \quad \text{و} \quad R_2 = 1/(\omega^2 C R_1) &\quad \text{ومنها نجد أن} \end{aligned}$$

وهذه هي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام طريقة تيار الشبكة في المسألة ٩-١٠ . لاحظ أن عدد المعادلات اللازمة لحل قد انخفض من أربع إلى ثلاث باستخدام طريقة جهد العقدة .



شكل ١٠ - ١١ .



شكل ١٠ - ١٠ .

١٠-٩ باستخدام طريقة العقدة من الجهد  $V_{AB}$  في الشبكة الكهربائية في الشكل ١٠-١١ .

في وجود عقدتين أساسيتين أو نقطتي اتصال فإننا نحتاج إلى معادلة عقدة واحدة فقط . نختار  $B$  كمعقدة إرسناد ونكتب المعادلة عند العقدة ١ . وبطبيق قانون كيرشوف التيار نجد أن التيار  $10\angle 0^\circ A$  يساوى التيارات الخارجة . إذاً .

$$V_1 = 10\angle 0 / (0.281 \angle 14.2^\circ) = 35.6 \angle 14.2^\circ V \quad \text{و} \quad 10\angle 0^\circ = V_1/10 + V_1/(5 - j2)$$

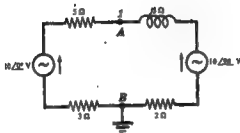
بما أن التيار المار في الفرع  $5 + j2 \Omega$  هو  $I = V_1 / (5 + j2) A$  فإن الجهد المطلوب عبر المثلث

هو  $5 \Omega$  :

$$V_{AB} = I(5) = \frac{V_1}{(5 + j2)}(5) = \frac{35.6 \angle 14.2^\circ}{(5 + j2)}(5) = 33 \angle -7.6^\circ V$$

١٠-٩ من الجهد  $V_{AB}$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٢ .

بما أنه لا يوجد في الدائرة عقدة أساسية ، فإنه إذا اخترنا  $B$  كمعدلة إستاند والنقطة  $A$  كمعدلة ١ ، فإنه يمكننا كتابة معادلة ذلك بفرض أن التيار خارج من  $A$  في كلا الفرعين .



شكل ١٠ - ١٢

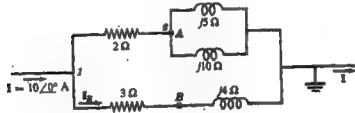
$$\frac{V_1 - 10 \angle 0^\circ}{(5 + j2)} + \frac{V_1 - 10 \angle 90^\circ}{(8 + j2)} = 0$$

بترتيب الحدود نحصل على :

$$V_1 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8 + j2} \right) = \left( \frac{10 \angle 0^\circ}{5} + \frac{10 \angle 90^\circ}{8 + j2} \right)$$

$$V_{AB} = V_1 = 11.8 \angle 55.0^\circ V.$$

١٠-٧ أوجد الجهد  $V_{AB}$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٣ .



شكل ١٠ - ١٣

إن معادلات العقد هي :

عند العقدة ١ :  $10 \angle 0^\circ = (V_1 - V_2)/2 + V_1/(3 + j4)$

عند العقدة ٢ :  $(V_2 - V_1)/2 + V_2/j5 + V_2/j10 = 0$

وبإعادة ترتيب الحدود نجد أن

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3 + j4} \right) V_1 - \frac{1}{2} V_2 = \frac{10 \angle 0^\circ}{2}$$

$$-\frac{1}{2} V_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10} \right) V_2 = 0$$



$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 0 & -0.5 \\ 0 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & -0.5 \\ -0.5 & (0.5 - j0.3) \end{vmatrix}} = \frac{5.83 \angle 31^\circ}{0.267 \angle 87.42^\circ} = 21.8 \angle 56.42^\circ \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.62 - j0.16) & 10\angle 0 \\ -0.5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_y} = \frac{5\angle 0}{0.267 \angle 87.42^\circ} = 18.7 \angle 87.42^\circ \text{ V}$$

جهد العقدة  $V_2$  هو جهد  $A$  بالنسبة لعقدة الإسناد. وبما أن  $I_B = V_B / (3 + j4)$  ، فإن الجهد  $V_B$  بالنسبة لعقدة الإسناد هو

$$V_B = \frac{V_1}{(3 + j4)}(4) = \frac{21.8 \angle 56.42^\circ}{(3 + j4)}(4) = 17.45 \angle 93.32^\circ \text{ V}$$

إذن الجهد المطلوب  $V_{AB}$  هو

$$V_{AB} = V_A - V_B = (18.7 \angle 87.42^\circ) - (17.45 \angle 93.32^\circ) = 2.23 \angle 34.1^\circ \text{ V}$$

١٠ - أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٤ تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$

نختار العقدة  $A$  ونقطة الإسناد كما هو موضح في الشكل. نحل معادلة العقدة.

$$\frac{V_1 + 100 \angle 120^\circ}{20} + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - 100 \angle 0}{10} = 0$$

نتحصل عل

$$V_1 = \frac{200 \angle 0 - 100 \angle 120^\circ}{5} = 50 - j17.32 = 53 \angle 19.1^\circ \text{ V}$$

إذن تيارات الأفرع المختلفة هي

$$I_A = (V_1 + 100 \angle 120^\circ) / 20 = (50 - j17.32 - 50 + j86.6) / 20 = 3.46 \angle 90^\circ \text{ A}$$

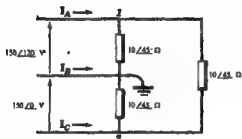
$$I_B = V_1 / 10 = 5.3 \angle 19.1^\circ \text{ A}$$

$$I_C = (V_1 - 100 \angle 0^\circ) / 10 = (50 - j17.32 - 100) / 10 = 5.3 \angle 160.9^\circ \text{ A}$$

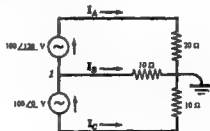
لاحظ أن مجموع التيارات المتصلة إلى عقدة الإسناد يساوي صفراً .

$$I_A + I_B + I_C = 3.46 \angle 90^\circ + 5.3 \angle 19.1^\circ + 5.3 \angle 160.9^\circ$$

$$= j3.46 + 5.0 - j1.732 - 5 - j1.732 = 0$$



شكل ١٠ - ١٠



شكل ١٠ - ١٤

٩-١٠ أوجد الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-١٥ تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$ .

المطلوبان 1 و 2 وحدة الإسناد جميعها موضحة في الشكل ١٠-١٥. إن جهتي المدة  $V_1$  و  $V_2$  التي يمكن قراءتها من الرسم مباشرة مساويان للتيارين الثابتين المطبقين. إذن

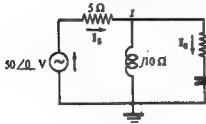
$$V_2 = -150 \angle 0^\circ = 150 \angle 180^\circ \text{ V} \quad \text{و} \quad V_1 = 150 \angle 120^\circ \text{ V}$$

ويطبق قانون كيرشوف التيار عند كل عقدة من العقد الثلاث يمكننا حساب التيارات المطلوبة.

$$I_A = \frac{V_1}{10 \angle 45^\circ} + \frac{V_1 - V_2}{10 \angle 45^\circ} = \frac{300 \angle 120^\circ - 150 \angle 180^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle 45^\circ \text{ A} \quad \text{عند العقدة 1}$$

$$I_B = \frac{-V_1}{10 \angle 45^\circ} - \frac{V_2}{10 \angle 45^\circ} = \frac{-150 \angle 60^\circ + 150 \angle 0^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle 75^\circ \text{ A} \quad \text{عند عقدة الإسناد}$$

$$I_C = \frac{V_1}{10 \angle 45^\circ} + \frac{V_2 - V_1}{10 \angle 45^\circ} = \frac{300 \angle 180^\circ - 150 \angle 120^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 26 \angle 195^\circ \text{ A} \quad \text{عند العقدة 2}$$



١٠-١٥ من الدائرة الموضحة في الشكل ١٦-١٠ القدرة الخارجة من المصدر والقدرة في كل مقاومة في الشبكة الكهربائية.

نختار عقدة الإسناد والمدة 1 كما هو موضح في الشكل : إذن معادلة العقدة هي

شكل ١٠ - ١٦

$$(V_1 - 50 \angle 0^\circ)/5 + V_1/10 + V_1/(3 - j4) = 0$$

ونحيا نحدد أن

$$V_1 = (10 \angle 0^\circ)/(0.326 \angle 10.6^\circ) = 30.7 \angle -10.6^\circ \text{ V}$$

وبإدخال الحصول على تيارات الأفرع التالية بفرض أن اتجاهها كما هو موضح في الشكل نحصل على :

$$I_A = (50 \angle 0^\circ - V_1)/5 = (50 \angle 0^\circ - 30.7 \angle -10.6^\circ)/5 = 4.12 \angle 15.9^\circ \text{ A}$$

$$I_B = V_1/(3 - j4) = (30.7 \angle -10.6^\circ)/(5 \angle -53.1^\circ) = 6.14 \angle 42.5^\circ \text{ A}$$

والقدرة الخارجة من المصدر .

$$P = VI \cos \theta = (50)(4.12) \cos 15.9^\circ = 198 \text{ W}$$

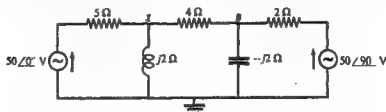
من المعادلة  $P = I^2 R$  يمكننا حساب القدرة المستغلة في كل مقاومة .

$$P_3 = (I_A)^2 5 = (6.14)^2 5 = 113 \text{ W} \quad \text{و} \quad P_5 = (I_B)^2 5 = (4.12)^2 5 = 85 \text{ W}$$

لاحظ أن القدرة الكلية الممتصة من المصدر تساوي مجموع القدرات المستغلة بمقاومات الدائرة : أي

$$P_5 = 85 + 113 = 198 \text{ W}.$$

١١-١ في الباترة الموضحة في الشكل ١٠-١٧ بين جهدي العقدين 1 و 2 . بالنسبة لنقطة الإسناد المختارة .



شكل ١٠ - ١٧

بالفحص يمكننا كتابة معادلي العقدة في الصيغة المصفوفية :

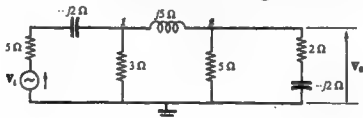
$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{50\angle 0^\circ}{5}\right) \\ \left(\frac{50\angle 90^\circ}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -0.25 \\ j25 & (0.75 - j0.5) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & -0.25 \\ -0.25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix}} = \frac{13.5\angle 56.3^\circ}{0.546\angle -13.9^\circ} = 24.7\angle 72.2^\circ \text{ V}$$

ومنها نجد أن :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & 10 \\ -0.25 & j25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & -0.25 \\ -0.25 & (0.75 + j0.5) \end{vmatrix}} = \frac{18.35\angle 37.8^\circ}{0.546\angle -13.9^\circ} = 33.6\angle 53.7^\circ \text{ V}$$

١٧- في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١٨ أوجد النسبة  $V_0/V_1$  وفك بفرض أن  $V_0$  هو المطبق في الجهد على المقاومة  $2 - j2\Omega$  الناتج عن المصدر  $V_1$  .



شكل ١٠ - ١٨

نختار العقدين 1 و 2 وحقة الإسناد كما هو موضح في رسم الدائرة . هذا الاختيار يكون  $V_0$  هو جهد العقدة 1 بالنسبة لنقطة الإسناد .

نكتب معادلات العقدة عن طريق الفحص في الصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5 - j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{j2}\right) & -\left(\frac{1}{j2}\right) \\ -\left(\frac{1}{j2}\right) & \left(\frac{1}{j2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-j2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{5 - j2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالحل الحصول على  $V_o$  نجد :

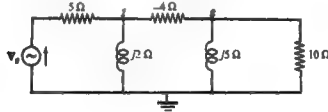
$$V_o = V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & V_p/15 - j2 \\ j0.2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.506 - j0.131) & j0.2 \\ j0.2 & (0.45 + j0.05) \end{vmatrix}} = \frac{(0.2 \angle 90^\circ)(V_p/15 - j2)}{(0.276 \angle -1^\circ)}$$

$$V_o = \frac{0.2 \angle -90^\circ}{(3 - j2)(0.276 \angle -1^\circ)} = 0.1345 \angle 61.2^\circ \quad \text{إذن :}$$

تسمى هذه النتيجة بدالة انتقال الجهد وهي تمكننا من حساب الجهد الخارج للفرع المطلوب وذلك لأي جهد دافع

$$V_o = V_1 (0.1345 \angle 61.2^\circ) \quad \text{مباشرة. أي أن}$$

١٥- ١٣ إذا أعطيت المقادير 1 و 2 في الشبكة الكهربية ١٠ - ١٩ ، فأوجد النسبة  $V_1/V_2$  .



شكل ١٠ - ١٩

بكتابة معادلات الدائرة في الصيغة المصفوية عن طريق الفحص نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4}\right) & -\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\left(\frac{1}{4}\right) & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (V_o/5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} (V_o/5) & -0.25 \\ 0 & (0.35 - j0.2) \end{vmatrix}}{\Delta_p} = \frac{(V_o/5)(0.403 \angle -29.8^\circ)}{\Delta_p}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.45 - j0.5) & (V_o/5) \\ -0.25 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_p} = \frac{(V_o/5)(0.25)}{\Delta_p}$$

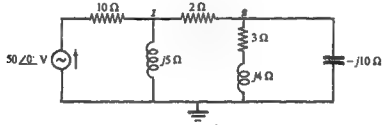
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(V_o/5)(0.403 \angle -29.8^\circ)/\Delta_p}{(V_o/5)(0.25)/\Delta_p} = 1.61 \angle -29.8^\circ$$

حسب آخر : بالتصير عن جهد كل عقدة بدلالة الموائد المشتركة . وبما أنه يوجد مصدر واحد بتيار  $I_1$

يؤثر في الدائرة فإن  $V_1 \sim I_1(\Delta_{11} - \Delta_{12})$  و  $V_2 \sim I_1(\Delta_{12} - \Delta_{22})$  إذن

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_1(\Delta_{11} - \Delta_{12})}{I_1(\Delta_{12} - \Delta_{22})} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} = \frac{0.35 - j0.2}{0.25} = 1.61 \angle -29.8^\circ$$

١٤-١٥ عن جهدي العنقتين 1 و 2 لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٠ باستخدام المساحة الداخلية ومساهمة الإنتقال.



شكل ١٠ - ٢٠

تمثل مصفوفة المساحة [Y] من طريق النقص بالصورة

$$[Y] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{5}\right) & -\left(\frac{1}{5}\right) \\ -\left(\frac{1}{5}\right) & \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.6 - j0.2) & -0.5 \\ -0.5 & (0.62 - j0.06) \end{bmatrix}$$

إذن :

$$Y_{input\ 1} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} (0.6 - j0.2) & -0.5 \\ -0.5 & (0.62 - j0.06) \end{vmatrix}}{(0.62 - j0.06)} = \frac{0.194 \angle -55.5^\circ}{0.62 \angle -5.56^\circ} = 0.313 \angle -49.94^\circ S$$

$$Y_{transfer\ 21} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{12}} = \frac{0.194 \angle -55.5^\circ}{(-1)(-0.5)} = 0.388 \angle -55.5^\circ S$$

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input\ 1}} + \frac{I_2}{Y_{transfer\ 21}}$$

عند العنقدة 1 :

بما أنه لا يوجد تيار عند العنقدة 2 ، أي أن  $I_2 = 0$  فإننا نحصل عل

$$V_1 = \frac{I_1}{Y_{input\ 1}} = \frac{(50 \angle 0^\circ) / 10}{0.313 \angle -49.94^\circ} = 15.95 \angle 49.94^\circ V$$

$$V_2 = \frac{I_1}{Y_{transfer\ 21}} + \frac{I_2}{Y_{input\ 2}} = \frac{(50 \angle 0^\circ) / 10}{0.388 \angle -55.5^\circ} = 12.9 \angle 55.5^\circ V$$

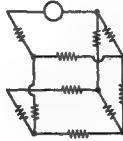
وبالتالي :

مسائل إضافية

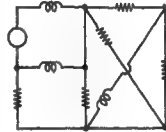
١٥ - ١٠ من عدد معادلات جهد العقدة اللازمة لحل كل شبكة من الشبكات الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢١ . (١-٥) .



(١)



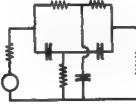
(ب)



(ج)



(د)



(هـ)

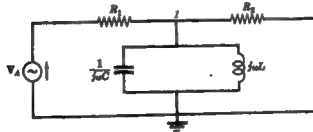


(ف)

شكل ١٠ - ٢١

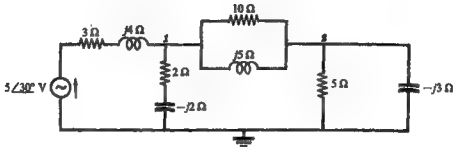
الاجواب : (أ) 3 ، (ب) 5 ، (ج) 1 ، (د) 4 ، (هـ) 4 ، (ف) 4

١٦ - ١٠ اكتب معادلة العقدة المطلوبة في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٢ .



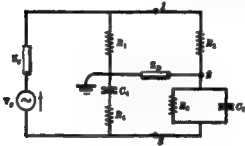
شكل ١٠ - ٢٢

١٧ - ١٠ اكتب معادلات المعقدة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠ - ٢٣ ثم حلها بالصيغة المصفوية . ثم اكتب [ ٧ ] بطريقة النسخ ولصقها بتركيبها في اتصال عليها من المعادلات .

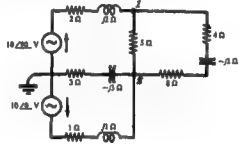


شكل ١٠ - ٢٣

١٠-١٨ أكتب معادلات المدة المدة المطاة في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٢٤ ثم عبر عنها بالصيغة المصفوية. ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التي نحصل عليها من المادلات.

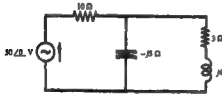


شكل ١٠ - ٢٥



شكل ١٠ - ٢٤

١٠-١٩ النائرة الموضحة في الشكل ١٠-٢٥ فتعريف أكتب معادلات المدة المدة المطاة هذه الدائرة ثم عبر عنها بالصيغة المصفوية، ثم أكتب [Y] بطريقة الفحص وقارنها بتلك التي نحصل عليها من المادلات.



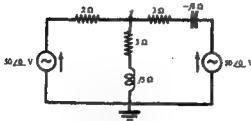
شكل ١٠ - ٢٦

١٠-٢٠ استخدم طريقة المدة في النائرة الموضحة في الشكل ١٠-٢٦ لتحصل على القدرة المطاة بالمصدر 30 volt والقدرة في المقاومين.

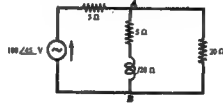
الجواب : 140 W, 80 W, 60 W

١٠-٢١ باستخدام طريقة المدة. أوجد الجهد  $V_{AB}$  في النائرة الموضحة في الشكل ١٠-٢٧.

الجواب :  $75.4 \angle 55.2^\circ V$



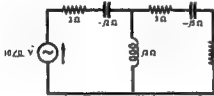
شكل ١٠ - ٢٨



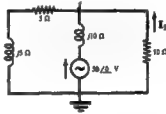
شكل ١٠ - ٢٧

٢٢-١٠ أوجد جهد العقدة  $V_1$  في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٢٨ . الجواب :  $43.9 \angle 149.7^\circ$

٢٣-١٠ أوجد الجهد عند العقدة  $I$  والتيار  $I_1$  في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٢٩ وذلك بفرض اتجاه  $I_1$  كما هو موضح في الرسم . الجواب :  $1.77 \angle 45^\circ$  V,  $1.77 \angle 135^\circ$  A



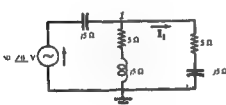
شكل ١٠ - ٢٠



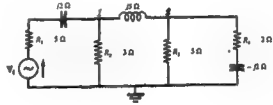
شكل ١٠ - ٢٩

٢٤-١٠ باستخدام طريقة العقدة أوجد القدرة المطاة بالمصدر 10 volts وكذلك القدرة في كل مقاومة في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٠ . الجواب :  $36.7$  W و  $27.8$  W و  $6.66$  W و  $2.22$  W

٢٥-١٠ أوجد القدرة المطاة لدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣١ بالمصدر  $50 \angle 0^\circ$  V . عين أيضا القدرة المستفادة في كل مقاومة في الدائرة . الجواب :  $P = 354$  W,  $P_1 = 256$  W,  $P_2 = 77.1$  W,  $P_3 = 9.12$  W,  $P_4 = 11.3$  W



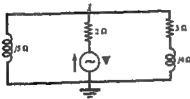
شكل ١٠ - ٣٢



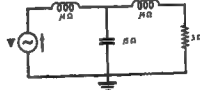
شكل ١٠ - ٣١

٢٦-١٠ باستخدام طريقة العقدة-أوجد  $I_1$  في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٣ . الجواب :  $5 \angle 90^\circ$  A

٢٧-١٠ أوجد في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٤ القيمة الفعلية لجهد المصدر  $V$  التي ينتج عنها قدرة  $75$  W في المقاومة  $3 \Omega$  . الجواب :  $24.2$  V



شكل ١٠ - ٣٤

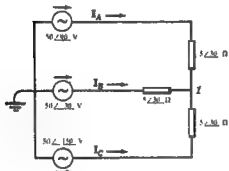


شكل ١٠ - ٣٣

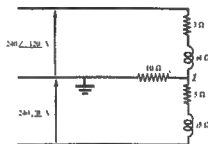


٣٨-١٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٤. أوجد جهد المصدر  $V$  الذي ينتج جهداً عند العقدة  $A$  مساوياً  $50 \angle 0^\circ V$ .  
الجواب :  $71.6 \angle 30.2^\circ V$

٣٩-١٠ أوجد الجهد عند العقدة  $A$  في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٥. الجواب :  $179 \angle 204.8^\circ V$



شكل ١٠ - ٣٦

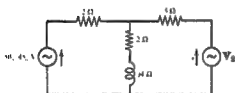


شكل ١٠ - ٣٥

٣٩-١٠ أوجد تيارات الأفرع الثلاثة  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٦.  
الجواب :  $10 \angle 180^\circ A$  و  $10 \angle -60^\circ A$  و  $10 \angle 60^\circ A$

٣٩-٢ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٧ أوجد  
جهد المصدر  $V_2$  الذي ينتج عنه تيار مساو للصفر في  
المقاومة  $2 + j4 \Omega$ .

الجواب :  $125 \angle -135^\circ V$



شكل ١٠ - ٣٧

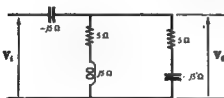
٣٧-١٠ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٣٧ إذا  
كان المصدر  $V_2$  هو  $100 \angle 30^\circ V$  فأوجد التيار  
في المقاومة  $2 + j4 \Omega$ .

الجواب :  $12.1 \angle -11^\circ A$

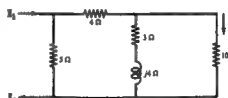
٣٣-١٠ في المسألة ٣٢-١٠ أوجد القدرة الممتصة في الشبكة الكهربائية بكل مصدر.

الجواب :  $P_1 = -90.6 W$ ,  $P_2 = 1000 W$

٣٤-١٠ أوجد النسبة  $I_2/I_1$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٣٨. علماً بأن التيار  $I_1$  هو  $0.151 \angle 25.8^\circ A$ .  
الجواب :  $I_2$  هو  $10 \Omega$



شكل ١٠ - ٣٩



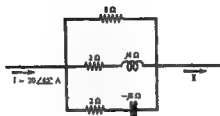
شكل ١٠ - ٣٨

٣٥ - ١٠ باستخدام طريقة العقدة أوجد دالة انتقال الجهد  $V_o/V_i$  وذلك الدائرة الموضحة في الشكل ٣٥-١٠ .

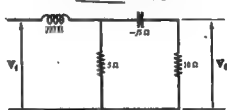
الجواب :  $0.707 \angle 45^\circ$

٣٩ - ١٠ أوجد دالة انتقال الجهد  $V_o/V_i$  الدائرة الموضحة في الشكل ٤٠-١٠ .

الجواب :  $0.159 \angle -61.4^\circ$



شكل ١٠ - ٣٥



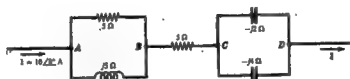
شكل ١٠ - ٣٩

٣٧ - ١٠ استخدم طريقة المدة الفصول على الجهد عبر الدائرة المتصلة على التوازي والموضحة في الشكل ٤١-١٠ .

الجواب :  $72.2 \angle 53.8^\circ V$

٣٨ - ١٠ باستخدام طريقة المدة أوجد الجهود  $V_{AB}$  و  $V_{BC}$  و  $V_{CD}$  وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٢-١٠ .

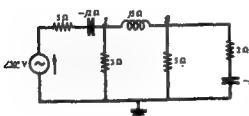
الجواب :  $35.4 \angle 45^\circ V, 50 \angle 0^\circ V, 13.3 \angle 90^\circ V$



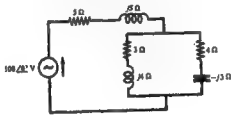
شكل ١٠ - ٣٧

٣٩ - ١٠ باستخدام طريقة المدة . أوجد الجهد عبر المقاومات المتصلة على التوازي وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٣-١٠ .

الجواب :  $35 \angle -24.8^\circ V$



شكل ١٠ - ٣٨

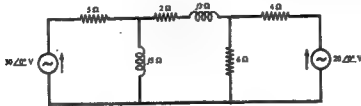


شكل ١٠ - ٣٩

٤٠ - ١٠ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٤-١٠ ، أوجد جهتي المدة  $V_1$  و  $V_2$  وكذلك تيار المصدر

الجواب :  $10 \angle 30^\circ V, 3.02 \angle 65.2^\circ V, 1.34 \angle 31.2^\circ V, 1.44 \angle 38.8^\circ A$

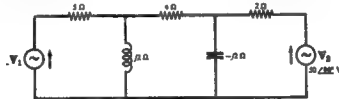
٤١-١٠ باستخدام طريقة المقتة أوجد القدرة في المقاومة  $6\ \Omega$  وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ٤١-١٠ .  
الجواب :  $39.6\ W$



شكل ١٠ - ٤١

٤٢-١٠ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ٤٢-١٠ ، أوجد التيار المار في المقاومة  $3\ \Omega$  +  $2\ \Omega$  وذلك مع اعتبار الاتجاه إلى اليمين موجبا .  
الجواب :  $1.73 / 40^\circ\ A$

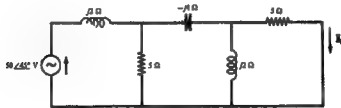
٤٣-١٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٣-١٠ ، أوجد الجهد  $V_1$  الذي يجعل التيار المار في المقاومة  $4\ \Omega$  مساويا للصفر . أعتبر احسن نهائى المقاومة كمقتة استناد .  
الجواب :  $95.4 / -23.2^\circ\ V$



شكل ١٠ - ٤٣

٤٤-١٠ بالإشارة إلى الدائرة الموضحة في الشكل ٤٤-١٠ إذا كان المصدر  $V_1 = 50\ \angle 0^\circ\ V$  و  $V_2$  غير معلوم ، فأوجد  $V_2$  بحيث يكون التيار المار في المقاومة  $4\ \Omega$  مساويا للصفر .  
الجواب :  $26.2 / 113.2^\circ\ V$

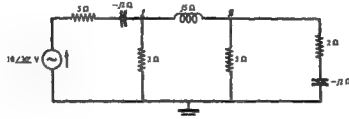
٤٥-١٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٥-١٠ أوجد التيار  $I_2$  وذلك مع اعتبار الاتجاه الموضح في الشكل .  
الجواب :  $11.7 / 112.9^\circ\ A$



شكل ١٠ - ٤٥

١٠-٤٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-٤٨ أوجد النسبة بين جهدي المقتنين  $V_1/V_2$ .

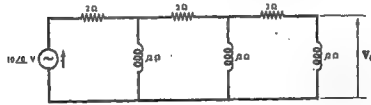
الجواب :  $2.26/96.35^\circ$



شكل ١٠ - ٤٨

١٠-٤٧ باستخدام طريقة العقدة أوجد الجهد  $V_0$  وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٤٩.

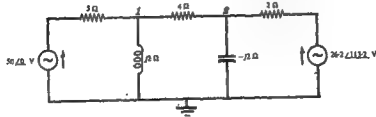
الجواب :  $1.56/128.7^\circ V$



شكل ١٠ - ٤٩

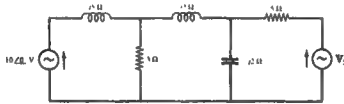
١٠-٤٨ أوجد جهدي المقتنين  $V_1$  و  $V_2$  وذلك في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠-٥٠.

الجواب :  $18.6/68.2^\circ V$



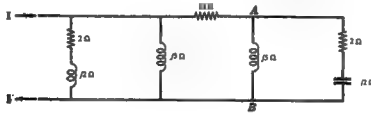
شكل ١٠ - ٥٠

١٠ - ٤٩ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٥١ أوجد مصدر الجهد  $V_2$  بحيث يكون تياره مساويا للصفر .  
الجواب :  $4 \angle 180^\circ V$



شكل ١٠ - ٥١

١٠ - ٥٠ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٠ - ٥٢ - أوجد التيار المار  $I$  الذي ينتج عنه جهد  $V_{AB}$  مساويا  $5 \angle 30^\circ V$   
الجواب :  $9.72 \angle -16^\circ A$



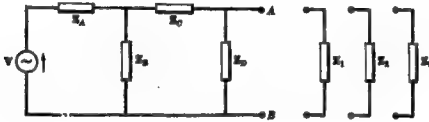
شكل ١٠ - ٥٢

## الفصل الحادي عشر

### نظريتا ثقيين ونورثن

بمقدمة :

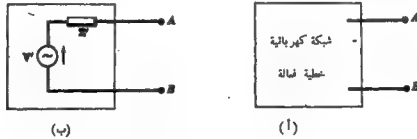
يمكن حل الشبكات الكهربائية التي فيها جميع الماووقات ثابتة باستخدام إما طريقة تيار الشبكة أو طريقة جهد العقد. لنعتبر الآن الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١-١١ وإذا أردنا توصيل الماووقات  $Z_0$  ،  $Z_1$  ،  $Z_2$  على التوالي في الدائرة ، فإنه بإدخال كل معاوقة في الدائرة ينتج لدينا مصفوفة مختلفة لـ  $Z$  أو  $Y$  حسب الطريقة المستخدمة ، وبالتالي فإننا نحتاج إلى ثلاثة حلول مختلفة . ويمكن التخلص من هذا العمل الشاق إذا استطعنا إبدال الشبكة الكهربائية المعالة بدائرة بسيطة مكافئة وهذا هو هدف نظريتي ثقيين ونورثن .



شكل ١-١١

نظرية ثقيين :

تنس لنظرية ثقيين على أن أي شبكة كهربائية خطية فعالة (active) لها تهاويان خارجيتان  $AB$  مثل تلك الموضحة في الشكل ١-١٢ (١) يمكن إبدالها بمصدر واحد جهد  $V$  متصل معه على التوالي معاوقة  $Z$  كما هو موضح في الشكل ١-١٢ (ب)



شكل ١-١٢ دائرة ثقيين المكافئة

ومصدر ثينين المكافئ  $V'$  هو جهد الدائرة المفتوحة المقاس بين الطرفين  $AB$  . والمقاومة المكافئة هي المقاومة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين  $AB$  وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .  
أما جهد ثينين المكافئ  $V'$  فيجب أن يتحاشى بحيث يكون التيار المسار في المقاومة المحصلة له نفس اتجاه التيار الذى ينتج عنه توصيل هذه المقاومة في الشبكة الأصلية للقناة .

## مثال ١ :

إذا أُصلحت الدائرة الموضحة في الشكل ١١-٣ ، بين دائرة ثينين المكافئة بالنسبة للطرفين  $AB$  . استخدم النتيجة التى تحصل عليها في إيجاد التيارين المسارين في المقاومتين  $Z_1 = 5 - j5 \Omega$  ،  $Z_2 = 10 \angle 0^\circ \Omega$  ، وذلك عند توصيلهما على التوالي بالطرفين  $AB$  ثم عين القدرة الممتصة هما .

بالإشارة إلى الشكل ١١-٣ ، فإن التيار هو

$$I = 50 \angle 0^\circ / (5 + j5 - j5) = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

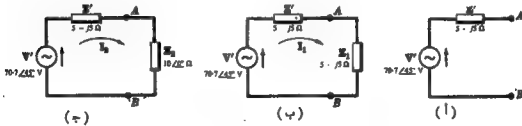
شكل ١١ - ٣

إذن جهد ثينين المكافئ  $V'$  هو المحيط في الجهد على المقاومة  $5 + j5 \Omega$  . إذن

$$V' = V_{AB} = 70.7 \angle 45^\circ \text{ V}$$

والمقاومة المحركة عند الطرفين  $AB$  هي :  $Z' = \frac{15 + j5(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5 \Omega$

وبوضع الشكل ١١-٤ (أ) دائرة ثينين المكافئة، ونلاحظ أن المصدر  $V'$  متجه إلى الطرف  $A$  .



شكل ١١ - ٤

وبتوصيل المقاومة  $Z_1$  بين طرفي دائرة ثينين المكافئة كما هو في الشكل ١١-٤ (ب) ، فإننا نجد في هذه الدائرة أن :

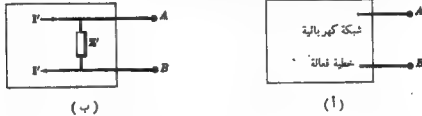
$$P_1 = I_1^2 R = 125 \text{ W} \quad \text{و} \quad I_1 = (70.7 \angle 45^\circ) / (5 - j5 + 5 - j5) = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

وعند توصيل المعاوقة  $Z_2$  بين الطرفين  $AB$  كما في الشكل ١١ - (ب) ، فلنأخذ نحصل على :

$$P_2 = (I_2)^2 10 = 200 \text{ W} \quad \text{و} \quad I_2 = (70 \angle 45^\circ)(5 - j5 + 10) = 4.47 \angle 63.43^\circ \text{ A}$$

### نظرية نورتن

تتمس نظرية نورتن على أن أي شبكة كهربائية خطية فعالة لها طرفان  $AB$  كالموضحة في الشكل ١١ - (أ) يمكن إبدالها بمصدر واحد التيار  $I'$  متصل معه على التوازي معاوقة واحدة كما في الشكل ١١ - (ب).



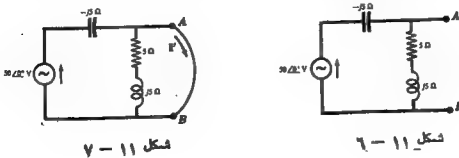
شكل ١١ - دائرة نورتن المكافئة

ومصدر نورتن المكافئ هو تيار الدائرة المغلقة بين طرفي الشبكة الفعالة ، والمعاوقة  $Z'$  المتصلة بمصدر التيار هي المعاوقة المحركة للشبكة الكهربائية بين الطرفين  $AB$  وذلك عند وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر . وعلى ذلك فإن المعاوقتين  $Z'$  لدائرتي نورتن ولتئين المكافئتين متساويتان وذلك لأي شبكة خطية فعالة .

واتجاه التيار المسار في المعاوقة المتصلة بين طرفي دائرة نورتن المكافئة يجب أن يكون هو نفس اتجاه التيار المسار في نفس المعاوقة عند توصيلها بالشبكة الفعالة الأصلية .

### مثال ٢ :

إذا أصلحت الدائرة الموضحة في الشكل ١١ - ٦ ، فممن دائرة نورتن المكافئة بالنسبة لطرفين  $AB$  . ثم استخدم النتيجة التي تحصل عليها في إيجاد التيار المسار في المعاوقتين  $Z_1 = 5 - j5 \Omega$  ،  $Z_2 = 10 \angle 0^\circ \Omega$  ، وذلك عند توصيلهما بالتربيط بين الطرفين  $AB$  ، وعين كلتا القدرة الممتصة هما .

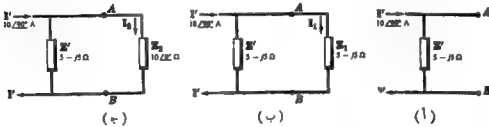




بالإشارة إلى الشكل ١١-٧ ، عند عمل دائرة متعلقة بين الطرفين  $AB$  ، فإن :  $I' = 50 \angle 0^\circ (-j5) = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$

وعند وضع المصدر مساوياً للمصدر فإن :  $Z' = \frac{-j5(5+j5)}{5+j5} = 5-j5 \Omega$

وبوضوح الشكل ١١-٨ (أ) دائرة نورتن المكافئة . لاحظ أن التيار متجه ناحية الطرف  $A$  .



شكل ١١ - أ

وعند توصيل المقاومة  $Z_1$  بين طرفي دائرة نورتن المكافئة كما في الشكل ١١-٨ (ب) ، فإن التيار المار في  $Z_1$  يكون

$$P_1 = (I_1)^2 5 = 125 \text{ W} \quad \text{والقدرة الممتصة لـ } Z_1 \text{ هي } I_1 = I' \left( \frac{Z'}{Z' + Z_1} \right) = 10 \angle 90^\circ \left( \frac{5-j5}{10-j10} \right) = 5 \angle 90^\circ \text{ A}$$

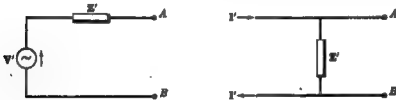
وعند توصيل المقاومة  $Z_2$  بين الطرفين  $AB$  كما في الشكل ١١-٨ (ج) ، فإننا نحصل على :

$$P_2 = (I_2)^2 10 = 200 \text{ W} \quad \text{و} \quad I_2 = I' (5-j5) / (15-j5) = 4.47 \angle 63.43^\circ \text{ A}$$

### دائرة ثنين ونورتن المكافئتان :

لقد طبقنا نظرية ثنين ونورتن على دائرتين متماثلتين في المثالين (١) ، (٢) على الترتيب وحصلنا على نتائج متطابقة .

ومن هنا نستنتج أن دائرتي ثنين ونورتن يكافئ كل منهما الآخر .



شكل ١١ - ٩ دائرتي ثنين ونورتن

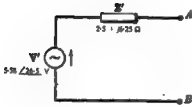
في الشكل ١١-٩ نجد أن نفس المقاومة  $Z'$  متصلة على يسار الجهتين  $AB$  . في كلا الدائرتين . وعند غلق الدائرتين فإن التيار المار في دائرة ثنين المكافئة يعطى بالعلاقة  $V'/Z'$  ، بينما يعطى التيار المار في دائرة نورتن المكافئة بـ  $I'$  . وبما أن  $I' = V'/Z'$  ، أي أن  $V' = I'Z'$  ، وجهه ثنين المكافئ\* وجهه ثنين المكافئ\* .

نفس النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها إذا اعتبرنا جهد الدائرة المفتوحة في كلتا الدائرتين . فدائرة ثلثين نجد أن الجهد هو  $V'$  أما في دائرة نورتن فإن هذا الجهد هو  $V' = I'Z'$  . وبمساواة الجهدين  $V' = I'Z'$  أو  $I' = V'/Z'$  وهى نفس النتيجة السابقة .

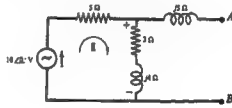
إن دالرتي ثلثين ونورتن متكافئتان عند ذيلية واحدة فقط . وينتج هذا من أن المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة استبدلت بالمعاوقة المكافئة  $Z'$  وأن الجهد المكافئ  $V'$  والتيار المكافئ  $I'$  قد حصل عليها باستخدام المعاوقات المركبة للشبكة الكهربائية الفعالة ، وبما أن كل عالمة في الشبكة الكهربائية الفعالة تعتمد على الذيلية ، فينتج من ذلك أن دالرتي ثلثين ونورتن متكافئتان فقط عند الذيلية التي نحسب منها .

### مسائل محلولة

١-١١ أوجد دائرة ثلثين المكافئة للشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١-١٠ .



شكل ١١ - ١١



شكل ١٠ - ١١

نحسب المعاوقة المكافئة لدائرة بوضع المصدر مساوياً للصفر . إذن

$$Z' = 5 + \frac{5(3 + j4)}{3 + 3 + j4} = 2.5 + j6.25 \Omega$$

أن تيار الدائرة المفتوحة  $I$  الموضحة في الشكل ١٠-١١ هو :  $I = (10\angle 0^\circ)/(5 + 3 + j4) = 1.117 \angle -26.6^\circ \text{ A}$  .  
إذن جهد الدائرة المفتوحة هو الجهد على المعاوقة  $3 + j4 \Omega$  .

$$V' = I(3 + j4) = (1.117 \angle -26.6^\circ)(5\angle 53.1^\circ) = 5.58 \angle 26.5^\circ \text{ V}$$

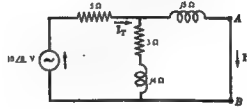
وتعطي قطبية  $V'$  باتجاه التيار الداخل إلى المعاوقة  $3 + j4 \Omega$  . وعلى ذلك فإن اتجاه استجابة  $V'$  تكون في اتجاه الطرف A في الدائرة المكافئة الموضحة في الشكل ١١-١١ .

٢-١١ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٠-١١ .

كما في المسألة ١-١١ ، فإن المعاوقة المكافئة هي :  $Z' = 2.5 + j6.25 \Omega$  .



شكل ١١ - ١٣



شكل ١١ - ١٢

نعمل دائرة مغلقة بين الطرفين  $AB$  كما هو موضح في الشكل ١١ - ١٢ ، ثم نعين المقاومة الكلية المتصلة بالمصدر  $10 \angle 0^\circ V$

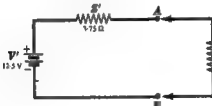
$$Z_T = 5 + \frac{(3+4)5}{(3+4)+5} = 5.83 \angle 23.2^\circ \Omega$$

$$I_T = 10 \angle 0^\circ / Z_T = (10 \angle 0^\circ) / (5.83 \angle 23.2^\circ) = 1.575 \angle -23.2^\circ A$$

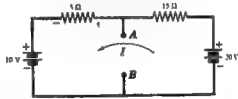
$$I' = I_T \left( \frac{3}{3+4+5} \right) = 1.575 \angle -23.2^\circ \left( \frac{3}{12} \right) = 0.38 \angle -41.65^\circ A$$

ويوضح الشكل ١١ - ١٣ دائرة ثورتن المكافئة . لاحظ أن التيار  $I'$  ينتج ناحية  $A$  وذلك لأن تيار الدائرة المغلقة يدخل الدائرة المغلقة عند الطرف  $A$  .

٣-١ في دائرة التيار المستمر الموضحة في الشكل ١١ - ١٤ ، وصل ثلاث مقاومات  $R_1 = 5 \Omega$  و  $R_2 = 1 \Omega$  و  $R_3 = 10 \Omega$  تباعا بين الطرفين  $AB$  . عين القدرة الممتصة لكل مقاومة .



شكل ١١ - ١٥



شكل ١١ - ١٤

نحصل أولا على دائرة ثنين المكافئة . في الشكل ١١ - ١٤ نجد أن التيار هو  $0.5 A$   $I = (20 - 10) / (5 + 15) = 0.5 A$  . وذلك بالطريقة الموضحة .

نمرن جهد  $A$  بالنسبة لنقطة  $B$  بالمعادلة

$$V'_{AB} = 10 + V_5 = 12.5 V$$

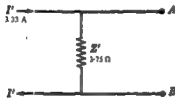
معد وضع مصدر التيار المستمر مساويا للمصدر ، فإن المقاومة  $Z'$  تصبح محصلة المقاومتين  $5 \Omega$  و  $15 \Omega$  المتصلتين على التوازي ، أي أن :

$$Z' = \frac{5(15)}{20} = 3.75 \Omega$$

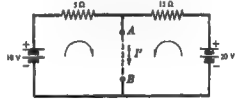
يوضح الشكل ١٥-١١ دائرة ثقلين المكافئة ، والآل دوسيل كل من المقاومات الثلاث بالطرفين  $AB$  فإنه يمكن حساب القدرة الممتصة لكل منهما :

$$\begin{aligned} \text{المقاومة } R_1 = 1 \Omega : I_1 &= 12.5 / (3.75 + 1) = 2.63 \text{ A} \quad \text{والقدرة هي : } (I_1)^2(1) = (2.63)^2(1) = 6.91 \text{ W} \\ \text{المقاومة } R_2 = 5 \Omega : I_2 &= 12.5 / (3.75 + 5) = 1.43 \text{ A} \quad \text{والقدرة هي : } (I_2)^2(5) = (1.43)^2(5) = 10.2 \text{ W} \\ \text{المقاومة } R_3 = 10 \Omega : I_3 &= 12.5 / (3.75 + 10) = 0.91 \text{ A} \quad \text{والقدرة هي : } (I_3)^2(10) = (0.91)^2(10) = 8.28 \text{ W} \end{aligned}$$

١١-١٥ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٦-١١ وذلك بالنسبة للطرفين  $AB$ .



شكل ١١ - ١٧



شكل ١١ - ١٦

نصل دائرة مغلقة بين الطرفين  $AB$  كما هو موضح ، ثم نحسب التيار  $I'$  .

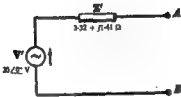
$$I' = 10/5 + 20/15 = 3.33 \text{ A}$$

المقاومة المكافئة بين الطرفين  $AB$  مع وضع المصدر مساويا للصفر هي :

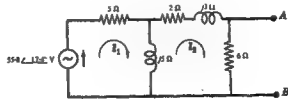
$$Z' = 5(15)/(5 + 15) = 3.75 \Omega$$

ويوضح الشكل ١٧-١١ دائرة نورتن المكافئة .

١١-١٥ أوجد دائرة ثقلين المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٨-١١ .



شكل ١١ - ١٩



شكل ١١ - ١٨

عند فتح الدائرة فإنه يوجد تياران للشحبتين الفرعيتين كما هو موضح . ويسعى تيار الشبكة الفرعية بالمعادلة .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 85 \angle -17.4^\circ \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 5 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{279 \angle 72.6^\circ}{83.7 \angle 72.6^\circ} = 3.33 \angle 0^\circ \text{ A}$$

إذن جهد الدائرة المفتوحة هو  $V_{AB} = I_2(6) = 3.33 \angle 0^\circ (6) = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$  . والمدة المكافئة للشبكة الكهربائية هي

$$Z' = \frac{6 \left[ \frac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3) \right]}{6 + \left[ \frac{5(j5)}{5 + j5} + (2 + j3) \right]} = 3.32 + j1.41 \Omega$$

ويوضح الشكل ١٩-١١ دائرة الثقبين المكافئة واتجاه  $V'$  إلى الطرف A.

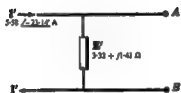
٩-١١ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-١٨ .

بمسألة دائرة مغلقة بين الطرفين AB ، يكون التيار  $I_2$  المار في الدائرة المغلقة هو

$$I_2 = I' = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & 85 \angle -17.4^\circ \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 2 + j3 \end{vmatrix}} = \frac{279 \angle 72.6^\circ}{(-5 + j50)} = 5.58 \angle 23.14^\circ \text{ A}$$

وكما في المسألة ١١-٥ فإن المحاورة هي

$$Z' = 3.32 + j1.41 \Omega$$



شكل ١١-٢٠

ولتحقيق فإنه يمكن مقارنة جهد الدائرة المفتوحة في

دائرة نورتن المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٢٠ بجهد الثقبين  $V'$  في المسألة ١١-٥ .

$$V_{oc} = I'Z' = 5.58 \angle 23.14^\circ (3.32 + j1.41) = 20.1 \angle 0.14^\circ \text{ V}$$

وفي المسألة ١١-٥  $V' = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$

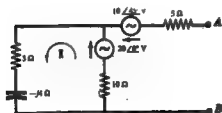
١١-٢١ ابدل الشبكة الكهربائية الفعالة الموضحة في الشكل ١١-٢١

بمائرة ثقبين المكافئة وذلك عند الطرفين AB

عند فتح الدائرة يكون التيار هو :

$$I = 20 \angle 0^\circ / (10 + 3 - j4) = 1.47 \angle 17.1^\circ \text{ A}$$

إذن المبرط في الجهد على المقاومة  $10 \Omega$  هو :



شكل ١١-٢١

$$V_{10} = R(10) = 14.7 \angle 17.1^\circ \text{ V.}$$

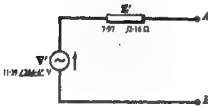
والآن نجد أن الجهد  $V_{AB}$  هو مجموع جهدي المصدرين والمربوط في الجهد على المقاومة  $10 \Omega$  ، وذلك بالنظرية الموضحة في الشكل ١١-٢٢ . إذن

$$V' = V_{AB} = 20 \angle 0^\circ - 10 \angle 45^\circ - 14.7 \angle 17.1^\circ = 11.39 \angle 264.4^\circ \text{ V}$$

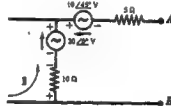
$$Z' = 5 + \frac{10(3-j4)}{10+3-j4} = 7.97 - j2.16 \Omega.$$

والمقاومة هي :

ويوضح الشكل ١١-٢٣ دائرة ثينين المكافئة .



شكل ١١ - ٢٣



شكل ١١ - ٢٢

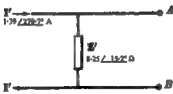
١١-٢٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية المطبقة في الشكل ١١-٢١.

كأن المسألة ١١-٧ فإن المقاومة :  $Z' = 7.97 - j2.16 \Omega$

وبمثل دائرة مغلقة بين الطرفين  $AB$  واختيار اتجاه الساعة لتيارات الشبكة في المسارات المغلقة الأولية ، نجد أن

$$I' = I_2 = \begin{vmatrix} 18 - j4 & -20 \\ -10 & (10 - 10 \angle 45^\circ) \\ 18 - j4 & -10 \\ -10 & 15 \end{vmatrix} = \frac{136 \angle 247.4^\circ}{112.3 \angle 32.3^\circ} = 1.39 \angle 279.7^\circ \text{ A}$$

ويجيب تيار مصدر نورتن  $I'$  إلى الطرف  $A$  كما هو موضح في الشكل ١١ - ٢٤ .



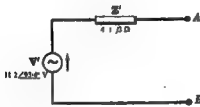
شكل ١١ - ٢٤

مقاومة جهد المائرة المفتوحة  $V_{oc}$  هذه المائرة بجهد مصدر ثينين المكافئ في المسألة ١١-٧ ، نجد أن :

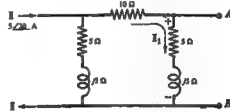
$$V_{oc} = I' Z' = (1.39 \angle 279.7^\circ)(8.25 \angle 15.2^\circ) = 11.45 \angle 264.5^\circ \text{ V}$$

$$V' = 11.39 \angle 264.4^\circ \text{ V}$$

٩-١١ أوجد دائرة ثافين المكافئة بين الطرفين  $AB$  وذلك لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٢٥ والتي تحتوي على مصدر التيار  $I = 5/30^\circ$  A.



شكل ١١ - ٢٦



شكل ١١ - ٢٥

تتكون المعاوقة المكافئة  $Z'$  بين الطرفين  $AB$  مع وضع المصدر مساوياً للصفر من فرعين متصلين على التوالي . إذن

$$Z' = \frac{(5 + j5)(15 + j5)}{(5 + j5) + (15 + j5)} = 4 + j3 \Omega$$

ويبلغ الدائرة ينقسم التيار  $I$  بين الفرعين . وبالحل للحصول على  $I_1$  الموضح بالرسم ، نجد أن

$$I_1 = 5/30^\circ \left( \frac{5 + j5}{20 + j10} \right) = 1.585 \angle 48.4^\circ \text{ A}$$

وبما أن الجهد  $V_{AB} = V$  هو المحبوط في الجهد على المعاوقة  $5 + j5$  ، إذن

$$V' = I_1(5 + j5) = (1.585 \angle 48.4^\circ)(7.07 \angle 45^\circ) = 11.2 \angle 93.4^\circ \text{ V}$$

ويوضح الشكل ٢٦-١١ دائرة ثافين المكافئة .

١٠-١١ أوجد دائرة نورن المكافئة لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٢٥ .

المعاوقة المكافئة لشبكة والمحصوة في المسألة ٩-١١ هي  $Z' = 4 + j3 = 5 \angle 36.9^\circ \Omega$  بمثل دائرة مغلقة بين الطرفين  $AB$  في الشكل ١١-٢٥ ، يكون التيار المار في الدائرة المغلقة هو

$$I' = 5 \angle 30^\circ \left( \frac{5 + j5}{5 + j3 + 10} \right) = 2.24 \angle 56.6^\circ \text{ A}$$

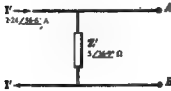
ويوضح الشكل ٢٧-١١ دائرة نورن المكافئة . متعلم

دائرة مغلقة. فإن جهد دائرة نورن المكافئة يكون

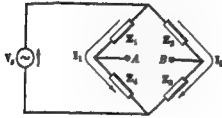
$$V_{oc} = (2.24 \angle 56.6^\circ)(5 \angle 36.9^\circ) = 11.2 \angle 93.5^\circ \text{ V}$$

وفي المسألة ٩-١١ نجد أن جهد ثافين المكافئ هو

$$V' = 11.2 \angle 93.4^\circ \text{ V}$$



شكل ١١ - ٢٧



شكل ٢٨ - ١١

١١-١١ أوجد دائرة ثينين المكافئة لدائرة القسمة المصغرة بالشكل

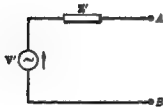
١١-٢٨ . تحت أي شرط يصبح جهد الدائرة المفتوحة بين الطرفين  $AB$  مساوياً للصفر ؟

عند وضع المصدر مساوياً للصفر ، فإن المألوفة المكافئة بين الطرفين  $AB$  تتكون من مجموعة التوازي  $Z_2$  و  $Z_4$  المتصلة حل التوازي مع مجموعة التوازي  $Z_1$  و  $Z_3$  . إذن

$$Z' = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

عند فتح الدائرة فإنه ينتج من المصدر  $V_g$  التيارين  $I_1$  و  $I_2$  كما في الرسم

$$I_2 = V_g / (Z_2 + Z_3) \quad \text{و} \quad I_1 = V_g / (Z_1 + Z_4)$$



شكل ٢٩ - ١١

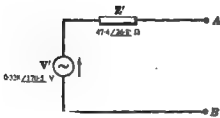
وبفرض أن جهد  $A$  أعلى من جهد  $B$  ، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} V' &= V_{AB} = I_1 Z_4 - I_2 Z_3 \\ &= \frac{V_g Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{V_g Z_3}{Z_2 + Z_3} \\ &= V_g \left[ \frac{Z_4 Z_3 - Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \right] \end{aligned}$$

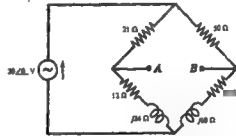
ما سبق يتضح أن جهد ثينين المكافئ يتناسب مع الفرق  $Z_1 Z_2 - Z_3 Z_4$  . وعندما  $Z_1 Z_2 = Z_3 Z_4$  و

فإن الجهد  $V' = 0$ .

١١-٣٠ أوجد دائرة ثينين المكافئة لدائرة القسمة المرفوعة في الشكل ١١-٣٠ .



شكل ٣١ - ١١



شكل ٣٠ - ١١

عند وضع المصدر مساوياً للصفر فإن المألوفة المكافئة بين الطرفين  $AB$  تصبح



$$Z' = \frac{21(12 + j24)}{33 + j24} + \frac{50(30 + j60)}{80 + j60} = 47.4 \angle 26.8^\circ \Omega$$

وعند فتح الدائرة فإن التيار المار في الجهة اليسرى في القطعة يكون  $I_1 = (20 \angle 0^\circ) / (33 + j24) \text{ A}$  . والتيار المار

$$I_2 = (20 \angle 0^\circ) / (80 + j60) \text{ A}$$

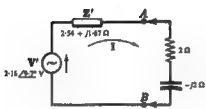
بفرض أن جهد النقطة A أعلى من جهد النقطة B ، نحصل على

$$\begin{aligned} V' = V_{AB} &= \frac{(20 \angle 0^\circ)(12 + j24)}{33 + j24} - \frac{(20 \angle 0^\circ)(30 + j60)}{80 + j60} \\ &= (20 \angle 0^\circ)(1 + j2) \left[ \frac{12}{33 + j24} - \frac{30}{80 + j60} \right] = 0.328 \angle 170.5^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

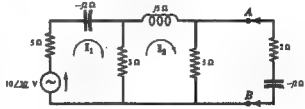
١٣-١١ أبداً الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٣٢ والتي على يسار الطرفين AB بدائرة لتعطين المكافئة . ثم عين التيار المار في المقاومة  $2 - j2 \Omega$  عند توصيلها بالدائرة المكافئة .

باعتبار الشبكة الكهربائية يمكن إيجاد المقاومة المكافئة  $Z'$  . وللاحظ أن المقاومة  $5 - j2 \Omega$  متصلة على التوازي مع المقاومة  $3 \Omega$  . إذن المقاومة المكافئة لها هي

$$Z_1 = \frac{(5 - j2)3}{8 - j2} = 1.94 - j0.265 \Omega$$



شكل ١١ - ٣٣



شكل ١١ - ٣٢

الآن نجد أن المقاومة  $Z_1$  متصلة على التوالي مع المقاومة  $5 \Omega$  ، وبجمعها نحصل على :

$$Z_2 = 1.94 - j0.265 + j5 = 1.94 + j4.735 \Omega$$

ويمكن الحصول على المقاومة المكافئة  $Z'$  من محصلة  $Z_2$  والمقاومة  $5 \Omega$  . إذن

$$Z' = \frac{(1.94 + j4.735)5}{6.94 + j4.735} = 3.04 \angle 33.4^\circ = 3.84 + j1.87 \Omega$$

وباعتبار الدائرة المفتوحة واستخدام طريقة تيار الشبكة الحصول على  $I_2$  نجد أن :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 - j2 & 10 \angle 90^\circ \\ -8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 - j2 & -8 \\ -8 & 8 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{80 \angle 90^\circ}{60 - 25 \angle 20.3^\circ} = 0.433 \angle 9.7^\circ \Omega$$

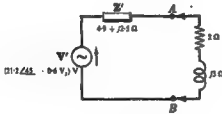
إن جهد التأثير المفتوحة هو المربوط في الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  ، أي أن

$$V' = I_1(5) = (0.433 \angle 9.7^\circ)5 = 2.16 \angle 9.7^\circ V$$

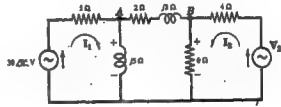
وبتوصيل المقاومة  $2 \Omega - j2 \Omega$  بدائرة ثنين المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٣٣ ، يكون التيار المطلوب هو :

$$I = V' / (Z' + 2 - j2) = (2.16 \angle 9.7^\circ) / (4 - j4) = 0.476 \angle 13.87^\circ A$$

١٤-١١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٣٤ ، أوجد  $V_2$  بحيث يصبح التيار المار في المقاومة  $1 + j3 \Omega$  مساوياً للصفر .



شكل ١١ - ٣٥



شكل ١١ - ٣٤

لتطبق نظرية ثنين على التأثير المخطط للحصول على الجهد المكافئ المقاس بين الطرفين  $AB$  . وبمعل دائرة مفتوحة لأن تيارى المسارين المتغلين هما

$$I_2 = V_2 / 10 \text{ amperes} \quad \text{و} \quad I_1 = (30 \angle 0^\circ) / (5 + j5) A$$

وبفرض أن جهد النقطة  $A$  أعلى من جهد النقطة  $B$  نحصل على :

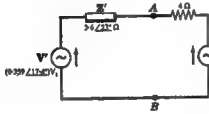
$$V' = V_{AB} = I_1(5) - I_2(6) = 30 \angle 0^\circ (5) / (5 + j5) - V_2(6) / 10 = 21.2 \angle 45^\circ - 0.6 V_2 \text{ volts}$$

ويكون التيار المار في دائرة ثنين المكافئة الموضحة في الشكل ١١-٣٥ مساوياً للصفر إذا كان  $V' = 0$  . إذن

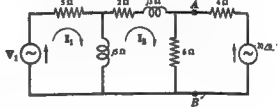
$$V_2 = 35.4 \angle 45^\circ V \quad \text{و} \quad 0 = 21.2 \angle 45^\circ - 0.6 V_2$$

ملحوظة : لا نحتاج في هذه المسألة إلى قيمة المقاومة  $Z'$  الموضحة في الشكل ١١-٣٥ ولكن يتراكم حساب قيمتها كتمرين تقاربى .

١٥-١١ في الدائرة الموضحة في الشكل ١١-٣٦ ، أوجد قيمة جهد المصدر  $V_1$  التي تجعل تيار المصدر  $20\angle0^\circ \text{ V}$  مساوياً للصفر



شكل ١١ - ٣٧



شكل ١١ - ٣٦

توجد دائرة ثلثين المكافئة للشبكة الكهربائية المعطاة التي على يسار الطرفين  $AB$  . وبمعل دائرة مفتوحة فإنه يوجد تياران للشبكتين الفرعيتين  $I_1$  و  $I_2$  كما هو موضح . وبالحل للحصول على  $I_2$  نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j5 & V_1 \\ -j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j5 & -j5 \\ -j5 & 5 + j5 \end{vmatrix}} = \frac{V_1 5/90^\circ}{88.6/78.6^\circ} \text{ amperes}$$

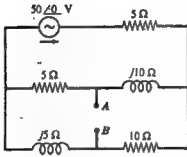
والآن نلاحظ أن جهد الدائرة المفتوحة هو المحوّل على الجهد على المقاومة  $6 \Omega$  وهو يساوي  $I_2(6)$  .

$$V' = \frac{V_1 5/90^\circ}{88.6/78.6^\circ} (6) = (0.359 \angle 17.4^\circ) V_1 \text{ volts}$$

وعند توصيل دائرة ثلثين المكافئة بالطرفين  $AB$  كما هو موضح في الشكل ١١-٣٧ ، يتضح أنه لكي يصبح التيار مساوياً للصفر فإن  $V' = 20\angle0^\circ \text{ V}$  أي أن  $V_1 = 20\angle0^\circ \text{ V}$  . إذن

$$V_1 = 53.7 \angle -17.4^\circ \text{ V} \quad (0.359 \angle 17.4^\circ) V_1 = 20\angle0^\circ \text{ V}$$

وتنطبق أيضاً الملاحظة الموجودة في المسألة ١١-١٤ على هذه المسألة



شكل ١١ - ٣٨

١١-١٦ إذا وصلت المقاومات  $Z_1 = 10\angle30^\circ \Omega$  و  $Z_2 = 20\angle0^\circ \Omega$

و  $Z_3 = 5 - j5 \Omega$  تماماً بين النقطتين  $AB$  في الشبكة

الكهربائية المعطاة الموضحة في الشكل ١١-٣٨ ، فاحسب القدرة في كل معاوقة .

لتبديل الشبكة الكهربائية بين النقطتين  $AB$  بدائرة ثلثين

المكافئة . ثم تصل المقاومات تماماً بالدائرة المكافئة .

لحساب المقاومة الداخلة لخيار ثلاثة تيارات شبكة كما لو كان المصدر المحرك بين  $AB$  كما هو مبين في الشكل

١١-٣٩ . في هذه الحالة تكون المقاومة الداخلة  $Z_{input}$  هي  $Z'$  لدائرة ثنين . ومن تعريف  $Z_{input}$

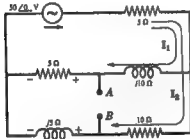
لدينا  $\Delta_{11} = \Delta / Z_{input}$  ، حيث

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (5+j5) & -5 & (5+j5) \\ -5 & (10+j10) & (-5-j10) \\ (5+j5) & (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 1455/131^\circ$$

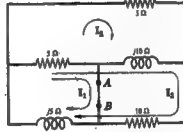
$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} (10+j10) & (-5-j10) \\ (-5-j10) & (15+j15) \end{vmatrix} = 218.5/69.4^\circ$$

$$Z' = Z_{input} = \Delta / \Delta_{11} = 1455/131^\circ / 218.5/69.4^\circ = 6.82/61.6^\circ = 4.23 + j5.34 \Omega$$

وبالتعويض



شكل ١١ - ٣٩



شكل ١١ - ٣٩

وبعمل دائرة مفتوحة يوجد لدينا تياران لشبكة  $I_1$  و  $I_2$  كما في الشكل ١١ - ٤٠ ، وهذا التياران هما

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 5 \\ 50 & 15+j5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+j10 & 5 \\ 5 & 15+j5 \end{vmatrix}} = \frac{550/92.6^\circ}{218.5/69.4^\circ} = 2.52/-23.2^\circ A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10+j10 & 50 \\ 5 & 50 \end{vmatrix}}{\Delta_{11}} = \frac{550/92.6^\circ}{218.5/69.4^\circ} = 2.52/-23.2^\circ A$$

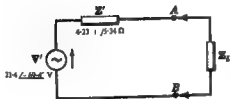
والآن فإن جهد ثنين المكافئ  $V'$  هو جهد الدائرة المفتوحة

وذلك مع فرض أن جهد  $A$  أعلى من جهد  $B$  . ونجد في الشكل

١١-٤٠ : القطبية الصحيحة للجهد في الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  المتصلة في

الفرع الأوسط والمربوط في الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  المتصلة في الفرع

السفل إذن :



شكل ١١ - ٤٠

$$\begin{aligned} V' &= V_{AB} = I_1(5) - I_2(5) \\ &= (2.52 \angle -23.2^\circ)(5) - (2.52 \angle -23.2^\circ)(5) \\ &= 23.4 \angle -69.4^\circ V \end{aligned}$$

ويوضح الشكل ١١ - ٤١ دائرة ثلثين المكافئة والمتصلة بها معاودة الحمل  $Z_L$  . بين الطرفين  $AB$  .

وبالتعويض عن قيمة  $Z_L$  . المعطاة في  $I = V / (Z' + Z_L)$  . يمكننا الحصول على التيارات والقدرات المطلوبة .

$$Z_L = Z_1 = 10 \angle 30^\circ = 8.66 + j5 \Omega \quad \text{إذن عندها}$$

$$P_1 = (I_1)^2 \operatorname{Re} Z_1 = (1.414)^2 (8.66) = 17.32 \text{ W} \quad , \quad I_1 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 8.66 + j5)} = 1.414 \angle -108.2^\circ \text{ A}$$

$$Z_{L_1} = Z_2 = 20 \angle 0^\circ \Omega \quad \text{وعندها!}$$

$$P_2 = (0.940)^2 (20) = 17.65 \text{ W} \quad , \quad I_2 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{4.23 + j5.34 + 20} = 0.940 \angle -81.8^\circ \text{ A}$$

$$Z_L = Z_3 = 5 - j5 \Omega \quad \text{وعندها.}$$

$$P_3 = (2.54)^2 (5) = 32.3 \text{ W} \quad , \quad I_3 = \frac{23.4 \angle -69.4^\circ}{(4.23 + j5.34 + 5 - j5)} = 2.54 \angle -71.5^\circ \text{ A}$$

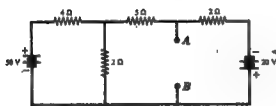
### مسائل إضافية

١٧ - ١ أوجد دائرة ثلثين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية الفعالة المعطاة في الشكل ١١ - ٤٢ .

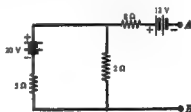
$$\text{الجواب : } Z' = 9.43 \text{ ohms, } V' = 6.29 \text{ V (B+)} \quad \text{!}$$

١٨ - ١ أوجد دائرة نورتن المكافئة لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٢ .

$$\text{الجواب : } Z' = 9.43 \text{ ohms, } I' = 0.667 \text{ A} \quad \text{!}$$



شكل ١١ - ٤٢



شكل ١١ - ٤٢

١٩ - ١ أوجد دائرة ثلثين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية النشطة الفعالة المعطاة في الشكل ١١ - ٤٢ .

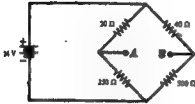
$$\text{الجواب : } Z' = 1.52 \text{ ohms, } V' = 11.18 \text{ V (B+)} \quad \text{!}$$

٢٠ - ١ أوجد دائرة نورتن المكافئة لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١ - ٤٢ .

$$\text{الجواب : } Z' = 1.52 \text{ ohms, } I' = 7.35 \text{ A} \quad \text{!}$$

٢١-١١ أوجد ثنتين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لنقطة التنترة الموضوعة في الشكل ١١-٤٤ .

الجواب :  $Z' = 55.5 \text{ ohms}$ ,  $V' = 0$



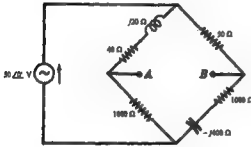
شكل ١١ - ٤٤

٢٢-١١ إذا استبدلنا المقاومة  $500\Omega$  بمقاومة  $475\Omega$  في دائرة التنترة الموضوعة في الشكل ١١-٤٤ ، فأوجد دائرة ثنتين المكافئة في هذه الحالة

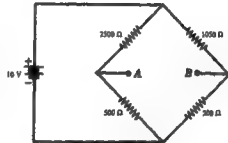
الجواب :  $Z' = 55.4 \text{ ohms}$ ,  $V' = 0.0863 \text{ V (A+)}$

٢٣-١١ طبق نظرية ثنتين على دائرة التنترة الموضوعة في الشكل ١١-٤٥ لتحصل على الانحراف في الجلفانومتر المتصل بين  $AB$  علماً بأن مقاومته  $100\Omega$  وحساسه  $0.5 \mu\text{A/mm}$ .

الجواب :  $D = 0.195 \text{ m}$



شكل ١١ - ٤٦



شكل ١١ - ٤٥

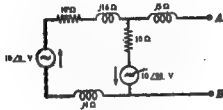
٢٤-١١ أوجد دائرة ثنتين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لنقطة التيار المتردد الموضوعة في الشكل ١١-٤٦ .

الجواب :  $Z' = 88.7 \angle 11.55^\circ \Omega$ ,  $V' = 0.192 \angle -43.4^\circ \text{ V}$

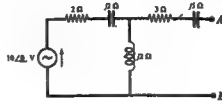
٢٥-١١ استخدم نظرية ثنتين لإيجاد القدرة في المقاومة  $1\Omega$  المتصلة بين الطرفين  $AB$  في الشبكة الكهربائية الموضوعة في الشكل ١١-٤٧ .

الجواب :  $2.22 \text{ W}$

٢٦-١١ كرر المسألة ٢٥-١١ باستخدام دائرة لورين للمكافئة .



شكل ١١ - ٤٨



شكل ١١ - ٤٧

١١-٢٧ أوجد دائرة ثينين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية المعطاة الموضحة في الشكل ١١ - ٤٨ .

الجواب :  $Z' = 10.6 \angle 45^\circ \Omega$ ,  $V' = 11.17 \angle -63.4^\circ V$

١١-٢٨ أوجد دائرة نورتن المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية المعطاة في الشكل ١١ - ٤٨ .

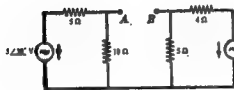
الجواب :  $Z' = 10.6 \angle 45^\circ \Omega$ ,  $I' = 1.05 \angle 251.6^\circ A$

١١-٢٩ استخدم نظرية ثينين لتحصل على القدرة في المقاومة  $2 + j4 \Omega$  المتصلة بين الطرفين  $AB$  في الشبكة الكهربائية

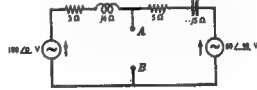
المعطاة الموضحة في الشكل ١١ - ٤٩ .

الجواب : 475 W

١١-٣٠ كرر المسألة ١١ - ٢٩ باستخدام نظرية نورتن .



شكل ١١ - ٥٠



شكل ١١ - ٤٩

١١-٣١ أوجد دائرة ثينين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية المعطاة الموضحة في الشكل ١١ - ٥٠ .

الجواب :  $Z' = 3.55 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $V' = 3.9 \angle 16.4^\circ V$

١١-٣٢ أوجد دائرة نورتن المكافئة لشبكة الكهربائية المعطاة في الشكل ١١ - ٥٠ .

الجواب :  $Z' = 3.55 \angle 0^\circ \Omega$ ,  $I' = 1.06 \angle 16.4^\circ A$

١١-٣٣ أوجد دائرة ثينين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية المعطاة الموضحة في الشكل ١١ - ٥١ .

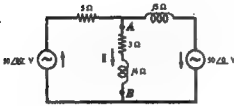
الجواب :  $Z' = 2.5 + j12.5 \Omega$ ,  $V' = 25\sqrt{2} \angle 45^\circ V$

١١-٣٤ أوجد دائرة نورتن المكافئة لشبكة الكهربائية المعطاة في الشكل ١١ - ٥١ .

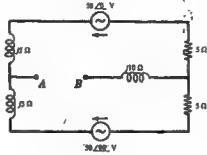
الجواب :  $Z' = 2.5 + j12.5 \Omega$ ,  $I' = 2.77 \angle -33.7^\circ A$

٣٥-١١ في الدائرة الموضحة في الشكل ١١-٥٢ أوجد التيار  $I$  المار في المقاومة  $4\Omega + 3\Omega$  وذلك باستبدال الشبكة الكهربائية بين الطرفين  $AB$  بدائرة ثنين المكافئة .

الجواب :  $Z' = 3.53 \angle 45^\circ \Omega$ ,  $V' = 70.7 \angle 135^\circ V$ ,  $I = 8.3 \angle 85.2^\circ A$



شكل ١١ - ٥٢



شكل ١١ - ٥١

٣٩-١١ كرر المسألة ٣٥-١١ باستخدام دائرة ثنين المكافئة بين الطرفين  $AB$  .

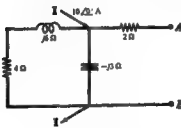
الجواب :  $Z' = 3.53 \angle 45^\circ \Omega$ ,  $I' = 20 \angle 90^\circ A$ ,  $I = 8.3 \angle 85.2^\circ A$

٣٧-١١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٥٣ : وصل تيار محرك  $15 \angle 45^\circ A$  بين النقطتين الموضحتين في الرسم . ابدل الشبكة الكهربائية بين  $AB$  بدائرة ثنين المكافئة .

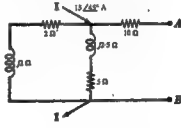
الجواب :  $Z' = 11.48 + j1.19 \Omega$ ,  $V' = 28.6 \angle 83.8^\circ V$

٣٨-١١ أوجد دائرة ثنين المكافئة بين الطرفين  $AB$  للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٥٣ .

الجواب :  $Z' = 11.48 + j1.19 \Omega$ ,  $I' = 2.47 \angle 77.3^\circ A$



شكل ١١ - ٥٤



شكل ١١ - ٥٣

٣٩-١١ أوجد دائرة ثنين المكافئة بين الطرفين  $AB$  للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٥٤ .

الجواب :  $Z' = 5.34 \angle 49.8^\circ \Omega$ ,  $V' = 43.3 \angle 70.6^\circ V$

٤٠-١١ أوجد دائرة ثنين المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١١-٥٤ .

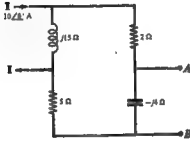
الجواب :  $Z' = 5.34 \angle 49.8^\circ \Omega$ ,  $I' = 8.1 \angle 20.8^\circ A$



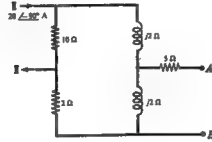
١١-١ : استخدام جلفرية ثنين لحمل عل القفرة فى الماونة  $Z = 10 \angle 60^\circ \Omega$  المتصلة بين الطرفين  $AB$  فى الشبكة الكهربية الموضحة فى الشكل ١١-٥٥ .

الجواب : 23 W

١١-٢ : كور المألة ١١-١ باستخدام دائرة نورتن المكافئة .



شكل ١١-٥٦



شكل ١١-٥٥

١١-٣ : أوجد دائرة ثنين المكافئة للشبكة الكهربية المعطاة الموضحة فى الشكل ١١-٥٦ .

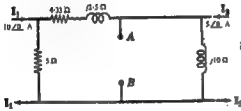
الجواب :

$$Z' = 5.09 \angle -82.5^\circ \Omega, V' = 46.2 \angle -57.5^\circ V$$

١١-٤ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربية الموضحة فى الشكل ١١-٥٦ .

الجواب :

$$Z' = 5.09 \angle -82.5^\circ \Omega, I' = 9.05 \angle 25^\circ A$$



شكل ١١-٥٧

١١-٥ : أوجد دائرة ثنين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربية المعطاة الموضحة فى الشكل ١١-٥٧ .

الجواب :  $Z' = 6.2 \angle 51.8^\circ \Omega, V' = 62.6 \angle 44.17^\circ V$

١١-٦ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربية الموضحة فى الشكل ١١-٥٧ .

الجواب :  $Z' = 6.2 \angle 51.8^\circ \Omega, I' = 10.1 \angle -7.63^\circ A$

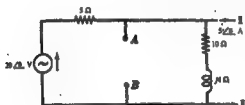
١١-٧ : أوجد دائرة ثنين المكافئة بين الطرفين  $AB$  للشبكة الكهربية الموضحة فى الشكل ١١-٥٨ واتى تحتوى عل مصدر

لتيار  $4 \angle 45^\circ A$  ومصدر جهد  $25 \angle 90^\circ V$ .

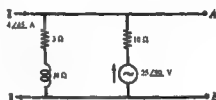
الجواب :  $Z' = 3.68 \angle 36^\circ \Omega, V' = 22.2 \angle 98^\circ V$

١١-٨ : أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربية الموضحة فى الشكل ١١-٥٨ .

الجواب :  $Z' = 3.68 \angle 36^\circ \Omega, I' = 6.03 \angle 62^\circ A$



شكل ١١ - ٥٩



شكل ١١ - ٥٨

١١-٥٩ أوجد دائرة ثينين المكافئة بين الطرفين  $AB$  لشبكة الكهربائية المعطاة الموصلة في الشكل ١١-٥٩ .

الجواب :  $V' = 31.2 \angle 6.82^\circ \text{ V}$  -  $Z' = 3.47 \angle 6.85^\circ \Omega$

١١-٥٨ أوجد دائرة ثينين المكافئة لشبكة الموصلة في الشكل ١١-٥٨ .

الجواب :  $I' = 9.0 \angle 0^\circ \text{ A}$  -  $Z' = 3.47 \angle 6.85^\circ \Omega$

## الفصل الثاني عشر

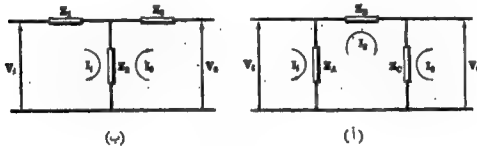
### نظريات الشبكات الكهربائية

#### مقدمة :

باستخدام طريقتي تيار الشبكة وجهد المقفلة يمكننا حل معظم مسائل الدوائر الكهربائية . ولقد ثبتت فاعلية نظريتي ثنيتين ونودتين الواردة في الفصل الحادي عشر في اختصارات العمليات الحسابية وذلك منه وجود عديد من المماثلات متصلة على الأفراد من نهايتها وبالمثل فإن النظريات الواردة في هذا الفصل تعمل بنا إلى نفس الغرض وهو تبسيط حل بعض الأنواع الخاصة للدوائر الكهربائية . ولهذا فإنه يمكن اعتبار هذا الفصل امتدادا للفصل الحادي عشر .

#### تحويلات نجمة - دلتا ( $\Delta - T$ )

يقال من الشبكة الخاملة ( غير الفعالة ) ذات النهايات الثلاث والتي تتكون من ثلاث معاوقات  $Z_A$  و  $Z_B$  و  $Z_C$  والموضحة في الشكل ١٢ - ١ (أ) بأنها تكون توصيلة حل هيئة دلتا ( $\Delta$ ) أو  $\pi$  . ويقال من الشبكة الخاملة ( غير الفعالة ) ذات النهايات الثلاث والتي تتكون من ثلاث معاوقات  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_3$  والموضحة في الشكل ١٢ - ١ (ب) بأنها تكون توصيلة حل هيئة ( ستار ) نجمة أو شكل حرف T . والبارتجان متكافئتان إذا تساوت معاوقات المدخل والمخرج وكذلك معاوقة الانتقال في الدائرتين .



شكل ١٢ - ١

نفرض أن  $V_1$  هو الجهد الداخل وأن  $V_0$  هو الجهد الخارج المقابل وذلك لكل دائرة . ونختار التيار الداخل  $I_1$  والتيار الخارج  $I_0$  وذلك في نفس اتجاه متارب الساعة لكل دائرة . وأن تيار الشبكة المتوسطة في دائرة توصيل دلتا هو  $I_2$  بالاتجاه الموضح .

وبذلك تكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية للدائرة توصيل دلتا هي

$$\begin{bmatrix} Z_A & -Z_A & 0 \\ -Z_A & Z_A + Z_B + Z_C & -Z_C \\ 0 & -Z_C & Z_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_3 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات المدخل والمخرج ومعاوقة الانتقال هي

$$Z_{input} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B}$$

$$Z_{output} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{33}} = \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C}$$

$$Z_{transfer} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = Z_C$$

ومعادلات تيار الشبكة للدائرة اتصال نجمة الموضحة في الشكل ١٢ - ١ (ب) هي :

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_3 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون معاوقات المدخل والمخرج ومعاوقة الانتقال هي

$$Z_{input} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$Z_{output} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta_{33}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_{transfer} = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

والآن بمساراة معاوقات دلتا بالمعاوقات النجمية نحصل على :

$$(١) \quad \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

$$(٢) \quad \frac{Z_B Z_C}{Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

$$(٣) \quad Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3}$$

وبالتعويض عن  $Z_B$  من المعادلة (٣) في المعادلتين (١) ، (٢) ثم بحلها الحصول على  $Z_A$  و  $Z_C$  نحصل على

$$(١) \quad Z_A = \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_0}$$

$$(٥) \quad Z_C = \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_A + Z_0 Z_A}{Z_1} \quad \text{و}$$

وعلى ذلك فإنه يمكن إبدال دائرة توصيل نجمة معاوقاتها  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_3$  بدائرة توصيل على هيئة دلتا معاوقاتها كما في المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥)

والحصول على تحويل دلتا إلى نجمة لجميع المعادلات (٣) ، (٤) ، (٥) ثم لعكس المجموع فنجد أن :

$$(٦) \quad \frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C)^2}$$

والآن بضرب الطرف الأيسر في المعادلة (٦) في  $Z_A$  و  $Z_B$  والطرف الأيمن في المعادلة (٦) بإسماوى  $Z_A$  من المعادلة (٤) و  $Z_B$  من المعادلة (٣) ، فنحصل على

$$\left( \frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C} \right) Z_A Z_0 = \frac{Z_1 Z_0 Z_0}{(Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C)^2} \left( \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_0} \right) \left( \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_0} \right)$$

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_0}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad \text{وهنا نجد أن}$$

وباستخدام طريقة مشابهة يمكن الحصول على  $Z_2$  و  $Z_3$  بدلالة  $Z_A$  و  $Z_B$  و  $Z_C$  . وبسهولة نجد لها بل النتيجة التالية لتحويلات النجمة إلى دلتا .

التحويل من دلتا إلى النجمة

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_0}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

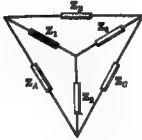
$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

التحويلات من النجمة إلى دلتا

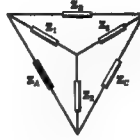
$$Z_A = \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_0}$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_0}$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_0 + Z_1 Z_C + Z_0 Z_C}{Z_1}$$



شكل ١٢ - ٣



شكل ١٢ - ٤

ولذا على قائلنا ان تذكر في تعيين العلاقات السابقة :

١ - التحويل من النجمة إلى دلتا .

أي معاوقة في دائرة دلتا تساوي مجموع كل احتمالات حاصل ضرب الزوجين لمعاوقات النجمة مقسوماً على المعاوقة المقابلة في دائرة النجمة .

وبالإشارة إلى الشكل ١٢ - ٣ ، فإن  $Z_R$  تعطى بمجموع ثلاثة حواصل ضرب مقسوماً على  $Z_B$  ، وهي المعاوقة المقابلة في دائرة النجمة .

٢ - التحويل من دلتا إلى نجمة .

أي معاوقة في دائرة النجمة تساوي حاصل ضرب المعاوقتين الجاورتين لها في دائرة دلتا مقسوماً على مجموع الضلعين معاوقات الشكل دلتا .

وبالإشارة إلى الشكل ١٢ - ٣ ، فإن  $Z_1$  تعطى بحاصل ضرب  $Z_B$  و  $Z_C$  ، وهما المعاوقتان الجاورتان من معاوقات دائرة دلتا ، مقسوماً على مجموع معاوقات دلتا الثلاث .

### نظرية التراكب

تتسبب نظرية التراكب على أن الاستجابة في أي عنصر في شبكة كهربائية خطية ذات جانبين وتحتوي على مصدرين أو أكثر تساوي مجموع الاستجابات التي تحصل عليها من كل عنصر عندما يؤثر بمفرده في الدائرة وذلك مع وضع جميع العناصر الباقية مساوية للصفر .

وبهذا التراكب موجود غمطاً في طريق تيار الشبكة وجهه المقصد لتحليل الشبكات . ولقد وجدنا أن تيارات الشبكة وجهه المقصد ، عبارة عن نسب بين عددين ( انظر الفصلين التاسع والعاشر ) . وذلك عندنا البسط بدلالة عناصر النموذج الموصى على المصادر يعطينا معادلات من الشكل :

$$(٧) \quad I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_S} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_S} + V_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_S} + \dots$$

$$(٨) \quad V_1 = I_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_V} + I_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_V} + I_3 \frac{\Delta_{31}}{\Delta_V} + \dots$$

والحدود في المعادلة (٧) هي مركبة التيارات لتيار الشبكة  $I_1$  الناتجة عن الجهود  $V_1$  و  $V_2$  . . الخ أما الحدود في المعادلة (٨) فهي مركبات جهد المقدة  $V_1$  الناتج عن التيارات  $I_1$  و  $I_2$  . . الخ .

وإذا اخترنا تيارات الشبكة بحيث تكون المصادر في أفرع ذات تيارات غير مركبة . فإن الحدود في المعادلة (٧) تكون مطابقة لتيارات الناتجة من تأثير المصادر كل على حدة . وبالمثل إذا كانت تيارات مصادر الشبكة الكهربائية التي نحلها بطريقة جهد المقدة لها جميعاً نفس نقطة الرجوع ، فإذا اخترنا هذه النقطة كنقطة إسناد فلنأخذ أن الحدود في المعادلة (٨) تكون مطابقة لجهود المقدة الناتجة من تأثير المصادر كل على حدة .

ويطبق مبدأ التراكب في تعيين التيارات وجهود المقدة المتصلة خطياً بالمصادر التي تؤثر في الشبكة الكهربائية . أما القدرة فلا يمكن تعيينها بالتراكب وذلك لأن العلاقة بين القدرة والتيار أو الجهد علاقة تربيعية .

### نظرية التبادل

تنص نظرية التبادل على أنه في أي شبكة خطية ذات جانبيين بها مصدر واحد تكون النسبة بين الإثارة والاستجابة ثابتة وذلك عند تغيير موضع الإثارة والاستجابة .

ويمكن إثبات هذه النظرية على أساس تيار الشبكة في حالة تأثير مصدر واحد في الشبكة الكهربائية وذلك باعتبار المعادلة الآتية لتيار الشبكة  $I_r$  .

$$I_r = V_1 \frac{\Delta_{1r}}{\Delta_S} + V_2 \frac{\Delta_{2r}}{\Delta_S} + \dots + V_r \frac{\Delta_{rr}}{\Delta_S} + V_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_S} + \dots$$

وإذا فرضنا أن المصدر الوحيد في الشبكة الكهربائية هو  $V_s$  . إذن

$$I_r = V_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_S}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هي :

$$(٩) \quad \frac{V_s}{I_r} = \frac{\Delta_S}{\Delta_{sr}} = Z_{transfer sr}$$

والآن عند تغير موضع الإثارة والاستجابة فإن المصدر يصبح  $V_p$  والتيار  $I_s$ .

$$I_s = V_p \frac{\Delta_{ps}}{\Delta_s}$$

والنسبة بين الإثارة والاستجابة هي

$$(١٠) \quad \frac{V_p}{I_s} = \frac{\Delta_s}{\Delta_{ps}} = Z_{transfer}$$

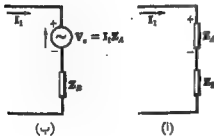
ولأي شبكة كهربائية خطية ذات جانبين تكون نماذج الانتقال في المادتين (٩) و (١٠) متساويتين ، ذلك لأنه في كل هذه الشبكات الكهربائية تكون مصفوفة الماوقة  $[Z]$  متماثلة بالنسبة المحور الأساسي ، وتكون العوامل المشتركة  $\Delta_{ps}$  و  $\Delta_{sp}$  متساوية ولذلك فإن التيار في الشبكة الفرعية  $p$  الناتج من مصدر الجهد في الشبكة الفرعية  $s$  يكون هو نفسه التيسار في الشبكة الفرعية  $s$  عندما ننقل مصدر الجهد إلى الشبكة الفرعية  $p$ . يجب ملاحظة أن التيارات في الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لا تظل كما هي .

تطبق نظرية التبادل أيضاً على الشبكات الكهربائية التي تحتوي على مصدر واحد للتيار . وفي هذه الحالة فإن النظرية تنص على أن الجهد الناتج بين طرفين  $m, n$  نتيجة لمصدر تيار يؤثر بين طرفين  $a, b$  يساوي الجهد بين الطرفين  $a, b$  عندما ننقل مصدر التيار ليؤثر بين الطرفين  $m, n$ . ويجب ملاحظة أن الجهد في الأجزاء الأخرى من الشبكة الكهربائية لا يظل كما هو . انظر المسألة ١٢-٩ .

### نظرية المماثلة :

يحدث على الشبكة الكهربائية التي تحتوي على معاوقة  $Z$  ويمر بها تيار  $I$  هبوط في الجهد مقداره  $IZ$ . وعلى حسب نظرية المماثلة فإن هذه الماوقة يمكن استبدالها بقوة دافعة كهربائية بمماثلة ويكون مقدار وطور هذا المصدر مساوياً لـ  $IZ$ . وبالمثل إذا كان الجهد  $V$  على أي عنصر أو فرع في شبكة كهربائية تحتوي على معاوقة  $Z$  ، فإن هذا العنصر أو الفرع يمكن إبداله بمصدر تيار  $I = V/Z$ . وبمد الترميز بالمصدر المماثل فإن التيارات أو الجهود في الأجزاء الأخرى في الشبكة الكهربائية تظل كما هي . وتسمى أيضاً نظرية التبادل أو المماثلة بنظرية الترميز .

يوضح الشكل ١٢-٤ (١) فرعاً من شبكة كهربائية يحتوي على معاقتين  $Z_R$  و  $Z_S$ . فإذا كان التيار المار في هذا الفرع هو  $I_1$  يكون المربوط في الجهد على  $Z_R$  هو  $I_1 Z_R$  بالتطبيق الموضحة . يوضح الشكل ١٢-٤ (ب) المصدر المماثل  $I_1 Z_R = V_c$  والذي يوضع بدلاً من  $Z_R$  . والمصدر  $V_c$  يجب أن يكون مستقلاً كما هو موضح في الشكل وذلك لأن رؤوس الأسهم تشير إلى النهاية الموجبة .

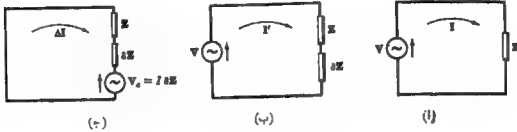


شكل ١٢-٤

إذا حدث أي تغير في الشبكة الكهربائية بحيث تتأثر قيمة  $I_1$  به فإن المصدر المماثل يجب بالتالي أن تتغير قيمته . ولهذا السبب فإن المصدر المماثل  $V_c$  يسمى مصدراً غير مستقل .



ويستفاد بنظرية المادلة في تعيين التيار الذي يحدث في تيار وجهه عنصر ما في الدائرة وذلك عندما تتغير قيمة معاوقته .  
ويحدث هذا في دوائر القنطرة ومقياس الجهد حيث يحدث تغيير بسيط في معاوقة ما ينتج عنه انحراف عن شرط الاتزان :

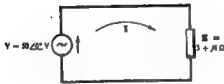


شكل ١٢ - هـ

في الشكل ١٢ - هـ (١) يؤثر المصدر  $V$  على الدائرة وينتج عنه تيار  $I = V/Z$  . في الشكل ١٢ - هـ (ب) تغيرت قيمة معاوقة الدائرة الكلية إلى  $(Z + \delta Z)$  إذن يصبح تيار الدائرة  $I' = V/(Z + \delta Z)$  . والآن يوجد عندنا المصدر المادل  $\delta Z = 1 \delta Z$   $V_e = 1 \delta Z$  يؤثر في الدائرة التي نحوى على  $Z$  و  $\delta Z$  . وذلك مع وضع المصدر الأصل مساوياً للصفره وينتج عنه تيار  $\Delta I$  كما هو موضح في الشكل ١٢ - هـ (ج) .  $\Delta I$  هو التغير في التيار الذي ينتج عن التغير  $\delta Z$  في معاوقة الدائرة - ونجد من نظرية التراكب أن  $I + \Delta I = I'$  أو  $\Delta I = I' - I$

مثال :

في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ٦ تتغير قيمة المعاوقة  $Q$  من  $3 + j4$  إلى  $5 + j5$  ، أي أن  $\delta Z = 2 + j1$  . أوجد التغير الحادث في التيار وذلك باستخدام الحسابات المباشرة ثم حقق النتيجة بتطبيق نظرية المادلة .



شكل ١٢ - ٦

لدينا قبل التغير

$$I = V/Z = (50\angle 0^\circ)/(3 + j4) = 10\angle -53.1^\circ \text{ A}$$

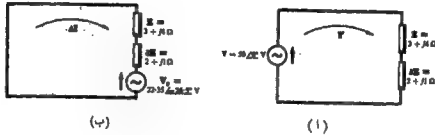
ومع إضافة  $\delta Z$  إلى الدائرة كما هو موضح في الشكل

١٢ - ٦ (١) يكون لدينا .

$$I' = V/(Z + \delta Z) = (50\angle 0^\circ)/(5 + j5) = 7.07\angle -45^\circ \text{ A}$$

ويكون التغير الناتج في التيار هو

$$\Delta I = I' - I = (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3.16\angle 108.43^\circ \text{ A}$$



شكل ١٢ - ٧

بتطبيق نظرية المعادلة يكون المصدر المماثل هو  $V_s = 18Z = (10\angle 26.5^\circ)(2 + j1) = 22.35 \angle 26.5^\circ V$ . وبإدخال هذا المصدر في الدائرة التي تحتوي على  $Z$  و  $8Z$  ووضع المصدر  $50\angle 0^\circ$  مساويا للصفر كما هو موضح في الشكل ١٢ - ٧ (ب)، فإن التيار في التيار يكون

$$\Delta I = -\frac{V_s}{Z + 8Z} = -\frac{22.35\angle 26.5^\circ}{8 + j8} = 8.14\angle 109.46^\circ A$$

وحل ذلك عندما نريد حساب التغير في التيار  $\Delta I$  المقابل للتغير الحادث في معاوقة دائرة  $I$  فإن  $\Delta I$  تعين بحل المصدر المماثل  $V_s$  يؤثر في الشبكة الكهربائية ونضع جميع المصادر الأخرى مساوية للصفر.

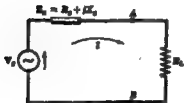
### نظريات انتقال أكبر قدرة :

تحدد نظريات انتقال أكبر قدرة التالية قيم معاوقات الحمل التي ينتج أكبر قدرة عبر نهايات شبكة كهربائية فعالة .

نعتبر مجموعة مصادر متصلة حل التوالى متصل معها معاوقة مركبة ثابتة تمثل قدرة إلى حمل يتكون من مقاومة متغيرة أو معاوقة مركبة متغيرة .

**الحالة الأولى :** الحمل يتكون من مقاومة متغيرة  $R_L$  (شكل ١٢ - أ)

التيار المسار في الدائرة هو



شكل ١٢ - ٨

$$I = \frac{V_s}{(R_s + R_L) + jX_s}$$

$$I = |I| = \frac{V_s}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + X_s^2}}$$

إذا القدرة الماطة بالمقاومة  $R_L$  هي

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2}$$

لتعبر قيمة  $R_L$  التي يكون التتال القدرة عندها إلى الحمل أكبر ما يمكن لنسج المفعلة المتطابقة الأولى  $dP/dR_L$  مساوية للصفر .

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{d}{dR_L} \left[ \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + X_g^2} \right] = V_g^2 \left\{ \frac{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2] - R_L(2)(R_g + R_L)}{[(R_g + R_L)^2 + X_g^2]^2} \right\} = 0$$

$$R_g^2 + 2R_g R_L + R_L^2 + X_g^2 - 2R_L(R_g + R_L) = 0$$

$$R_g^2 + X_g^2 = R_L^2$$

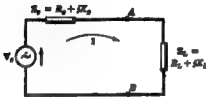
$$R_L = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |Z_g| \quad \text{إذاً}$$

وعلى ذلك فعندما يكون الحمل مقاومة نقية متغيرة فإننا نحصل على أكبر قدرة من نهاية شبكة كهربائية لمالة عندما تكون قيمة مقاومة الحمل مساوية للقيمة المطلقة لمقاومة الشبكة الكهربائية الفعالة .

وإذا كانت المركبة الممالة للمقاومة المتصلة على التتال مع المصدر مساوية للصفر ، أي أن  $X_g = 0$  فإن أكبر قدرة تنتقل إلى الحمل عندما تتساوى قيمتا الحمل ومقاومة المصدر ، أي أن  $R_L = R_g$  .

**المطابقة التلقية :** الحمل يتكون من معاوقة  $Z_L$  معاوضتها ومعاوضتها متغيرتان (شكل ١٢-٩) .

تيار الدائرة هو .



شكل ١٢ - ٩

$$I = \frac{V_g}{(R_g + R_L) + j(X_g + X_L)}$$

$$I = |I| = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}}$$

والقدرة الماطة بالمصدر هي

$$P = I^2 R_L = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2 + (X_g + X_L)^2}$$

(١١)

إذا ثبتنا قيمة  $R_L$  في (١١) فإن قيمة  $P$  تكون أكبر ما يمكن عندما  $X_g = -X_L$ . إذن المعادلة (١١) تصبح

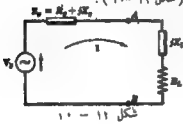
$$P = \frac{V_g^2 R_L}{(R_g + R_L)^2}$$

نعتبر الآن قيمة  $R_L$  متغيرة ، وكأني الحالة الأولى فإن أكبر قدرة تعطى للحمل عندما  $R_L = R_g$  وإذا كانت  $R_L = R_g$

$$Z_L = Z_g^* \quad \text{فإن} \quad X_L = -X_g$$

كما سبق يتضح أنه إذا كانت معاوقة الحمل تتكون من مقاومة متغيرة ومعاينة متغيرة ، فإننا نحصل على أكبر قدرة من طرفي شبكة كهربائية فعالة عندما تكون معاوقة الحمل  $Z_L$  مساوية لمرافق المعاوقة المركبة  $Z_g$  للشبكة الكهربائية .

**الحالة الثالثة :** الحمل يتكون معاوقة  $Z_L$  مقاومتها متغيرة ومعاينتها ثابتة (شكل ١٢ - ١٠) .



شكل ١٠ - ١٢

نحصل في هذه الحالة على نفس معادلات التيار  $I$  والقدرة  $P$

كما في الحالة الثانية عندما تكون  $X_L$  ثابتة .

عند مساواة المشتقة التفاضلية الأولى للقدرة  $P$  بالنسبة إلى

بالصفر فإننا نجد أن

$$R_L^2 = R_g^2 + (X_g + X_L)^2$$

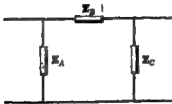
$$R_L = |Z_g + jX_L|$$

بأن قيمة كل من  $Z_g$  و  $X_L$  ثابتة فإنه يمكن جمعها في معاوقة واحدة . وعندما تكون  $R_L$  متغيرة فإن الحالة الثالثة

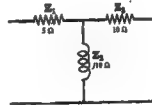
تؤول إلى الحالة الأولى ، وتنتج أكبر قدرة عندما تكون  $R_L$  مساوية للقيمة المطلقة لمعاوقة الشبكة الكهربائية

### ممسائل محلولة

١٢ - ١ : عين دائرة لدينا المكافئة للمعاوقات المتصلة على شكل النجمة المرفوعة في الشكل ١٢ - ١١ .



شكل ١٢ - ١٢



شكل ١١ - ١٢

نجدى دائرة دلتا المكافئة على  $Z_A$  و  $Z_B$  و  $Z_C$  كما في الشكل ١٢-١٢ .

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} = \frac{5(j10) + 5(10) + 10(j10)}{10} = \frac{50 + j150}{10} = 5 + j15 \Omega$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} = \frac{50 + j150}{j10} = 15 - j5 \Omega$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1} = \frac{50 + j150}{5} = 10 + j30 \Omega$$

وكاختبار النتيجة نحول معاوقات دائرة دلتا الموضحة في الشكل ١٢-١٢ مرة أخرى إلى دائرة النجمة - إذن

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(15 - j5)}{5 + j15 + 15 - j5 + 10 + j30} = \frac{150 + j800}{80 + j40} = 5 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(5 + j15)(10 + j30)}{80 + j40} = j10 \Omega$$

$$Z_3 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(15 - j5)(10 + j30)}{80 + j40} = 10 \Omega$$

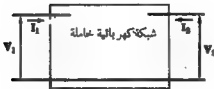
١٢ - ٢ مجموعة متصلة على شكل دلتا تتكون من ثلاث معاوقات متساوية  $Z_\Delta = 15/30^\circ \Omega$  أوجد المعاوقات المكافئة المتصلة على شكل النجمة .

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_\Delta \quad \text{حيث} \quad Z_2 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_2 = Z_3 = Z_\Delta/3 = 5/30^\circ \Omega \quad \text{وبالمثل} \quad Z_1 = Z_\Delta/3 = 5/30^\circ \Omega \quad \text{إذن}$$

وعلى ذلك فإن أى دائرة على شكل دلتا بثلاث معاوقات متطابقة لها دائرة نجمة مكافئة معاومتها تساوى ثلث معاوقات دائرة دلتا .

وبالعكس فمنعما تتساوى معاوقات دائرة على شكل النجمة فإن معاوقات دائرة دلتا المكافئة لها تكون أيضا متساوية وتساوى ثلاث أضعاف معاوقات دائرة النجمة .



شكل ١٢ - ١٢

١٢ - ٣ بين أنه يمكن إبدال الشبكة الكهربائية المتصلة الخاطئة ذات الأطراف بثلاث معاوقات متصلة على شكل دلتا .

نحسب مصدر جهد  $V_2$  يؤثر على طرفي الجهة اليسرى في الشبكة الكهربائية . ولزمن أيضاً  $V_3$  ، ولا عند طرفي الجهة اليمنى كما هو موضح .  
بما أن الشبكة الكهربائية عاملة فإن جميع المصادر المتحركة الأخرى تساوى صفراً .

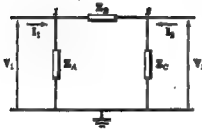
أن معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & \dots & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_n = V_1 \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_S} + V_2 \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_S} \quad \text{و} \quad I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_S} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_S}$$

والآن بالتميز عن هاتين المعادلتين الآتيتين بالصيغة المصفوفية نجد أن :

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta_S} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta_S} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta_S} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



شكل ١٢ - ١٤

وهذه المعادلة المصفوفية مشابهة للمعادلة الناتجة

من شبكة كهربائية ذات عقد ثلاث وذلك مع

اختيار واحدة منها كمقدمة إسناد. الشكل ١٢-١٤

يوضح مثل هذه الشبكة التي فيها  $Z_A$  و  $Z_B$  و  $Z_C$

متصلة على شكل دلتا. بإدخال  $V_1$  و  $I_1$  و  $V_2$  و  $I_2$

يتلىس الانجاء الموضح في الشكل ١٢-١٤ وكتابة

المعادلات المقابلة في الصيغة المصفوفية عن طريق

تطبيق طريقة جهد العقدة نحصل على

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) & -\frac{1}{Z_B} \\ -\frac{1}{Z_B} & \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

بمسواة معاملات العناصر في المصفوفتين ، نجد أن

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_C}\right) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_S} \quad (٢) \quad \left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B}\right) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_S} \quad (١)$$

$$-\frac{1}{Z_B} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_S} \quad (٣)$$

وبالتعويض في (١) و (٢) نحصل حل

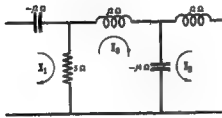
$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}}, \quad Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}}, \quad Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}}$$

كما سبق يتضح أنه يمكن رياضيا تحويل أى شبكة كهربائية ذات ثلاثة أطراف إلى دائرة مكافئة على شكل دلتا أو النجمة . ولكن عناصر كل دائرة مكافئة ربما لا يكون لها معنى فيزيائى . انظر المسألة ١٢-٤ .

١٢ - ٤ طبق نتيجة المسألة ١٢ - ٣ على الشبكة الكهربائية

الموضحة في الشكل ١٢ - ١٥ لتحصل على دائرة

دلتا المكافئة .



شكل ١٢ - ١٥

نحدد تيارات الشبكة كما هو موضح في الرسم  
لتحصل على

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5-j3 & 0 & -5 \\ 0 & -j3 & -j4 \\ -5 & -j4 & 5-j3 \end{vmatrix} \\ = 40 - j84 = 46.6 / -31^\circ$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -j3 & -j4 \\ -j4 & 5-j3 \end{vmatrix} = 12 - j10, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 5-j3 & -5 \\ -5 & 5-j3 \end{vmatrix} = -4 - j80, \\ \Delta_{21} = (-) \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -j4 & 5-j3 \end{vmatrix} = j80$$

باستخدام تعبيرات المسألة ١٢-٣ نجد أن

$$Z_A = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11} + \Delta_{21}} = \frac{46.6 / -31^\circ}{12 - j10 + j80} = 2.98 / -70.8^\circ \Omega \\ Z_B = -\frac{\Delta_Z}{\Delta_{21}} = -\frac{46.6 / -31^\circ}{j80} = 2.88 / 98^\circ \Omega \\ Z_C = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22} + \Delta_{21}} = \frac{46.6 / -31^\circ}{-4 - j80 + j80} = 11.65 / 168^\circ \Omega$$

لاحظ أن المقاومة  $Z_A$  يمكن تحقيقها بمقاومة ومكثف متصلين على التوالي و  $Z_B$  بمقاومة وحث متصلين على التوالي . أما تحقيق المقاومة  $Z_C$  يلزمه مقاومة سالبة . وكل ذلك لأن الدائرة ذات الثلاث مقاومات المحسوبة لا يمكن تحقيقها .

١٢ - ٥ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار في المقاومة  $2\Omega$  في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-١٦ .

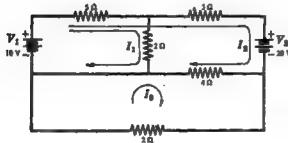
نفرض أن  $I'$  هو التيار المار في المقاومة  $2\Omega$  نتيجة للمصدر  $V_1$  وذلك مع وضع المصدر  $V_3$  مساوياً للصفر . وأن  $I''$  هو التيار المار في نفس الفرع نتيجة للمصدر  $V_3$  مع وضع  $V_1$  مساوياً للصفر . باعتبار تيارات الشبكة كما هو موضح في الشكل ١٢ - ١٦ وحل المعادلات للحصول على  $I'$  و  $I''$  نجد أن

$$I' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 5 & 0 \\ V_1 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 5 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{10 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 1.075 \text{ A}$$

$$I'' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -V_3 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = \frac{-(-20) \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}}{242} = 2.48 \text{ A}$$

ب تطبيق نظرية التراكب يكون التيار  $I_1$  الناتج من وجود المصدرين في آن واحد هو

$$I_1 = I' + I'' = 1.075 + 2.48 = 3.555 \text{ A}$$

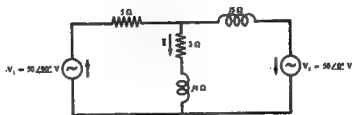


شكل ١٢ - ١٦

١٧ - ٦ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ١٧ لتحصل على التيار المار في المقاومة

$$3 + j4 \Omega$$





شكل ١٢ - ١٧

نضع  $V_2 = 0$  وبذلك يكون  $V_1$  هو المصدر الوحيد في الدائرة . إذن

$$Z_{T1} = 1 + \frac{(3 + j4)j5}{3 + j5} = 5.03 + j0.5 = 5.05/2.2^\circ \Omega$$

$$I_{T1} = \frac{V_1}{Z_{T1}} = \frac{50/0^\circ}{5.05/2.2^\circ} = 7.87/22.2^\circ \text{ A}$$

والتيار المسار في الفرع  $3 + j4 \Omega$  نتيجة للمصدر  $V_1$  فقط هو

$$I_1 = I_{T1} \left( \frac{j5}{3 + j5} \right) = 7.87/22.2^\circ \left( \frac{j5}{3 + j5} \right) = 4.15/85.3^\circ \text{ A}$$

وبنفس  $V_1 = 0$  وبذلك يكون  $V_2$  هو المصدر الوحيد في الدائرة . إذن

$$Z_{T2} = j5 + \frac{5(3 + j4)}{3 + j4} = 2.5 + j0.25 = 2.74/2.2^\circ \Omega$$

$$I_{T2} = \frac{V_2}{Z_{T2}} = \frac{50/0^\circ}{2.74/2.2^\circ} = 7.42/-22.2^\circ \text{ A}$$

والتيار المسار في الفرع  $3 + j4 \Omega$  نتيجة لمصدر  $V_2$  فقط هو

$$I_2 = -(7.42/-22.2^\circ) \left( \frac{5}{3 + j4} \right) = 4.15/85.3^\circ \text{ A}$$

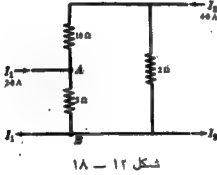
وبذلك يكون التيار الكلي المسار في الفرع  $3 + j4 \Omega$  هو

$$I = I_1 + I_2 = 4.15/85.3^\circ + 4.15/85.3^\circ = 8.30/85.3^\circ \text{ A}$$

١٧ - ٧ طبق نظرية التراكب على الشبكة الكهربائية

الموضحة في الشكل ١٧ - ١٨ وذلك لإيجاد

الجهد  $V_{AB}$ .



شكل ١٧ - ١٨

نفرض أن المصدر  $I_1 = 2A$  يؤثر في

الشبكة الكهربائية ونضع المصدر  $I_2 = 0$

إذن  $V'_{AB} = 2 \times \frac{12}{17} = 7.06V$ .

نضع الآن  $I_1 = 0$  وبذلك يكون  $I_2 = 4A$

هو الذي يؤثر في الشبكة الكهربائية وبذلك يكون

التيار المار في المقاومة  $5\Omega$  هو

$$I_2 = 4(2/17) = 8/17A$$

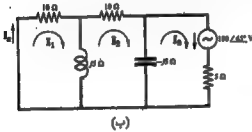
إذن  $V''_{AB} = (8/17)5 = 2.35 \text{ volt}$ .

وعل هذا فإن الجهد  $V_{AB}$  في حالة وجود المصدرين معاً هو

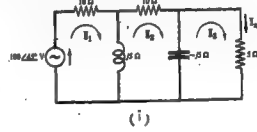
$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = 7.06 + 2.35 = 9.41V$$

١٧ - ٨ إذا كان التيار  $I_x$  هو التيار المار في الفرع  $5\Omega$  في الشبكة الكهربائية وحده المصدر في الشكل ١٧ - ١٩

(١) والنتائج من مصدر الجهد  $100/45^\circ V$  ، فأوجد  $I_x$  ثم حقق نظرية التبادل لهذه الدائرة .



(ب)



(١)

شكل ١٧ - ١٩

يوضح الشكل ١٧ - ١٩ (١) تيارات الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  . التيار المطلوب هو تيار الشبكة  $I_x$  .

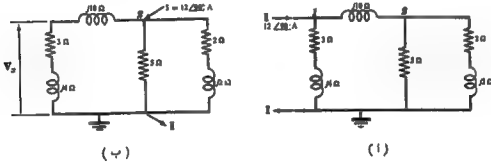
$$(1) \quad I_x = I_3 = \begin{vmatrix} 10 + j5 & -j5 & 100/45^\circ \\ -j5 & 10 & 0 \\ 0 & j5 & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 10 + j5 & -j5 & 0 \\ -j5 & 10 & j5 \\ 0 & j5 & 5 - j5 \end{vmatrix} = 100/45^\circ \left( \frac{25}{1185/-12.5^\circ} \right) = 2.18/57.5^\circ A$$

والآن نطبق نظرية التبادل بتغيير موضعى الإثارة والاستجابة كما هو موضح فى الشكل ١٢-١٩ (ب) .  
ومرة أخرى باستخدام تيارات المسار المطلق الأول فى اتجاه عقارب الساعة كما هو موضح وملاحظة أن  $I_x = I_1$  ، إذن

$$(٢) \quad I_x = I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -j5 & 0 \\ 0 & 10 & j5 \\ 100 \angle 45^\circ & j5 & 5 - j5 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = 100 \angle 45^\circ \left( \frac{25}{1155 \angle -18.6^\circ} \right) = 2.16 \angle 63.6^\circ \text{ A}$$

ومقارنة نتيجة (١) و (٢) نجد أن قيمة  $I_x$  فى المادتين مساويتان وهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ - ٩ نحسب الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢-٢٠ (١) على مصدر واحد التيار هو  $I = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$  .  
من الجهد  $V_2$  عند المقلد 2 . طبق نظرية التبادل ثم قارن النتيجةين .



شكل ١٢ - ٢٠

إن مادتى المقلد فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٢-٢٠ (١) بالصيغة المصفوية هى :

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{8+j4} + \frac{1}{j10} \right) & -\frac{1}{j10} \\ -\frac{1}{j10} & \left( \frac{1}{j10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2+j5} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \angle 90^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونبها نجد أن

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0.12 - j0.26 & 12 \angle 90^\circ \\ 0.12 - j0.26 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.12 - j0.26 & j0.1 \\ j0.1 & 0.45 - j0.35 \end{vmatrix}} = 12 \angle 90^\circ \left( \frac{-j0.1}{0.161 \angle 260.35^\circ} \right) = 7.45 \angle 99.65^\circ \text{ V}$$

نستخدم نظرية التبادل مع اعتبار أن التيار  $I$  بين المدة 2 ومدة الإسناد في الدائرة الموصفة في الشكل ١٢-٢٠ (ب). ثم نحسب الجهد بين التابئين نتيجة لمصدر الحركة السابق . بما أنه يوجد عقدتان فقط في الشبكة الكهربائية فإن المطلوب معادلة عقدة واحدة .

$$\left( \frac{1}{3+j14} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2+j8} \right) V_2 = 12 \angle 90^\circ \quad \text{إذن}$$

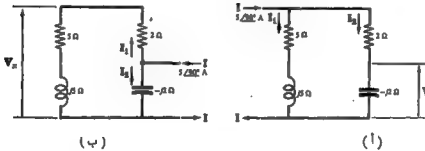
$$V_2 = \frac{12 \angle 90^\circ}{0.563 \angle -34.4^\circ} = 21.3 \angle 124.4^\circ \text{ V}$$

وبالتالي فإن الجهد  $V_x$  يكون

$$V_x = V_2 \left( \frac{3+j4}{3+j4+j10} \right) = 21.3 \angle 124.4^\circ \left( \frac{3+j4}{3+j14} \right) = 7.45 \angle 99.6^\circ \text{ V}$$

بمقارنة القيمة المحسوبة للجهد  $V_2$  للشبكة الكهربائية الموصفة في الشكل ١٢-٢٠ (أ) بالجهد  $V_x$  للشبكة الكهربائية الموصفة في الشكل ١٢-٢٠ (ب) نجد أنهما متساويان ، وهذا يحقق نظرية التبادل . لاحظ أيضا أن  $V_2$  لا يقلل كما هو بمنزلة تيار موسمي الإثارة والاستجابة .

١٢-٢١ أوجد الجهد  $V_x$  في الدائرة الموصفة في الشكل ١٢-٢١ (أ) والتي تحتوي على مصدر واحد التيار . غير موسمي مصدر التيار والجهد الناتج  $V_x$  . هل تتحقق نظرية التبادل ؟



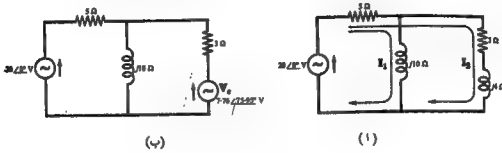
شكل ١٢ - ٢١

في الشكل ١٢-٢١ (أ) نجد أن التيار  $I_1 = I \left( \frac{5+j5}{7+j5} \right) = 5 \angle 90^\circ \left( \frac{5+j5}{7+j5} \right) = 4.64 \angle 111.8^\circ \text{ A}$  .  
إذن الجهد  $V_x = I_1(-j5) = 4.64 \angle 111.8^\circ (2 \angle -90^\circ) = 9.28 \angle 21.8^\circ \text{ V}$

إذا بدلنا موسمي مصدر التيار  $I$  والجهد  $V_x$  المقاس بين التابئين كما في الشكل ١٢-٢١ (ب) ،

يكون التيار في هذه الحالة هو  $I_2 = I \left( \frac{-j5}{7+j5} \right) = 5 \angle 90^\circ \left( \frac{-j5}{7+j5} \right) = 1.31 \angle -23.2^\circ \text{ A}$  . وبما أن  $V_x = 1.31 \angle -23.2^\circ (5+j5) = 9.27 \angle 21.8^\circ \text{ V}$  ، إذن فهذا يحقق نظرية التبادل .

١٢ - ١١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٢ (أ) ابدل الممانعة  $4\Omega$  بقوة دافعة كهربائية معادلة .



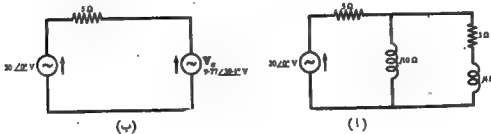
شكل ١٢ - ٢٢

نختار تيارات الشبكة  $I_1$  ،  $I_2$  كما هو موضح في الرسم ثم نحل المعادلات للحصول على التيار  $I_2$  المسار في الممانعة  $4\Omega$  فنجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j10 & 20 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j10 & 5 \\ 5 & 8 + j4 \end{vmatrix}} = \frac{20(j10)}{\frac{108}{104.08^\circ}} = 1.94 \angle -14.08^\circ \text{ A}$$

والمصدر المادل هو  $V_x = I_2(4) \angle -14.08^\circ (4) = 7.76 \angle 75.92^\circ \text{ V}$  . يوضح الشكل ١٢-٢٢ (ب) الدائرة بعد وضع المصدر المادل بدلاً من الممانعة  $4\Omega$  . لإثبات أن الدائرتين متكافئتان أوجد تيار أحد الأفرع في الدائرتين وقارن النتيجة .

١٢ - ١٢ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٣ (أ) ابدل المجموعة المتصلة على التوازي والمكونة من  $10\Omega$  بمصدر معادل  $3 + j4\Omega$  .



شكل ١٢ - ٢٣

المقاومة المكافئة المجموعة المتصلة على التوازي هي

$$Z_{eq} = \frac{j10(3+j4)}{3+j14} = 1.46 + j3.17 = 3.30 \angle 65.3^\circ \Omega$$

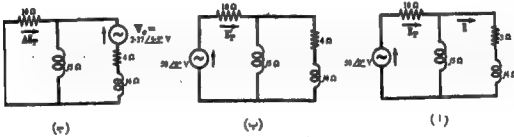
$$I_2 = \frac{V}{Z_T} = \frac{20 \angle 0^\circ}{7.18 \angle 26.2^\circ} = 2.79 \angle -26.2^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T = 5 + 1.46 + j3.17 = 7.18 \angle 26.2^\circ \Omega \quad \text{إذن}$$

والصادر المعادل هو :

$$V_o = I_2 Z_{eq} = 2.79 \angle -26.2^\circ (3.30 \angle 65.3^\circ) = 9.27 \angle 39.1^\circ \text{ V}$$

وبشرح الشكل ١٢ - ٢٣ (ب) الدائرة بعد وضع مصدر الجهد المعادل في القطبية الفعلية .

١٢-١٣ إذا تبينت المعاوقة  $3+j4 \Omega$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٤ (أ) إلى المعاوقة  $4+j4 \Omega$  كما في الشكل ١٢-٢٤ (ب) . فأوجد التيار المسار في المقاومة  $10 \Omega$  قبل وبعد التغيير . ثم طبق نظرية التبادل أو المعادلة لتعيين الفرق في تيار المقاومة  $10 \Omega$ .



شكل ١٢ - ٢٤

قبل التغيير في المعاوقة  $3+j4 \Omega$  (شكل ١٢-٢٤ (أ)) لدينا

$$I_2 = \frac{V}{Z_T} = \frac{20 \angle 0^\circ}{11.1 \angle 13^\circ} = 1.80 \angle -13^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T = 10 + \frac{5(3+j4)}{3+j4} = 11.1 \angle 13^\circ \Omega$$

بعد التغيير (شكل ١٢-٢٤ (ب)) لدينا

$$I_2' = \frac{V}{Z_T'} = 1.80 \angle -13.65^\circ \text{ A} \quad , \quad Z_T' = 10 + \frac{5(4+j5)}{4+j5} = 11.03 + j2.68 = 11.35 \angle 13.65^\circ \Omega$$

بمصدر الصائد الجهدى  $V_o = 8 \angle 0^\circ$  حيث  $I$  التيار الابتدائى في الفرع  $3+j4 \Omega$  هو

$$I = I_2 \left( \frac{5}{3+j4} \right) = 1.80 \angle -13^\circ \left( \frac{5}{3+j4} \right) = 2.37 \angle 5.5^\circ \text{ A}$$

و  $\delta Z = (4 + j4) - (3 + j4) = 1 \Omega$  . إذن  $V_o = 2.37 \angle 5.5^\circ (1) = 2.37 \angle 5.5^\circ \Omega$  واتجاهه في نفس اتجاه  $I$  .

ونحصل على التعبير  $\Delta I_o$  في التيار بوضع مصدر الجهد الأساسي مساوياً للصفر مع ترك  $V_o$  يؤثر بمفرده في الدائرة كما في الشكل ١٢-٢٤ (ج) . إذن هذه الدائرة يكون لدينا  $Z_{T'} = 4 + j4 + \frac{j5(10)}{10 + j5} = 10 \angle 52.1^\circ \Omega$  يكون لدينا

$$\Delta I_o = - \left( \frac{V_o}{Z_{T'}} \right) \left( \frac{j5}{10 + j5} \right) = - \left( \frac{2.37 \angle 5.5^\circ}{10 \angle 52.1^\circ} \right) \left( \frac{j5}{10 + j5} \right) = 0.1055 \angle 125.8^\circ \text{ A}$$

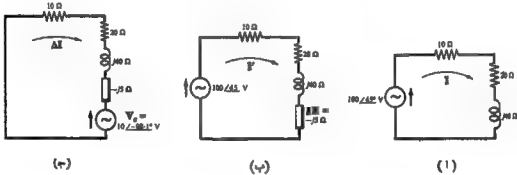
نقارن  $\Delta I_o$  بالفرق بين  $I_o'$  و  $I_o$

$$I_o' - I_o = (4.41 \angle -13.65^\circ) - (4.30 \angle -13.1^\circ) = -0.10 - j0.03 = 0.1045 \angle 196.7^\circ \text{ A}$$

لاحظ أن قيمتي  $I_o$  غير متساويتين تماماً . إن قيمة  $\Delta I_o$  المحسوبة باستخدام جهد التبادل  $V_o$  أكثر دقة من قيمة  $I_o$  التي حصلنا عليها من طرح التيارين الأساسيين  $I_o'$  و  $I_o''$  . وهذه النتيجة صحيحة تماماً عندما يكون التأثير في الماروقة صغير . والنتيجة السابقة الهامة التي يكون فيها تغير التيار صغير تقتضي اعتبار وجود خطأ عند حساب الفرق بين قيمتين متقاربتين في القيمة .

١٤-١٢ احسب التيار في تيار الدائرة المتصلة على الدوال والموضحة في الشكل ١٢-٢٥ (أ) وذلك عندما تقل قيمة الممانعة إلى  $35 \Omega$  .

نفرض أن  $I$  و  $I'$  هما تيارا الدائرة قبل وبعد التغيير الحادث في الممانعة كما هو موضح في الشكل ٢٥-٢٢ (أ) ، (ب) . إذن



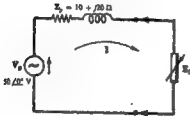
شكل ١٢ - ٢٥

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100 \angle 45^\circ}{30 \angle 33.1^\circ} = 2.0 \angle 8.1^\circ \text{ A}; I' = \frac{V}{Z + \delta Z} = \frac{100 \angle 45^\circ}{30 + j35} = 2.17 \angle -4.4^\circ \text{ A}$$

$$\Delta I = I' - I = 2.17 \angle -4.4^\circ - 2.0 \angle 8.1^\circ = 0.223 \angle 31.6^\circ \text{ A}$$

إذا حسبنا  $\Delta I$  بتطبيق نظرية التبادل نحصل على  $V_s = I(\Delta Z) = 2.0 \angle -8.1^\circ (-j5) = 10 \angle -98.1^\circ \text{ V}$   
 واتجاهه كما في الشكل ١٢-٢٥ (ج) . والتعبير في التيار هو

$$\Delta I = -V_s / (Z + \Delta Z) = -(10 \angle -98.1^\circ) / (30 + j35) = (10 \angle 81.9^\circ) / (46.1 \angle 49.4^\circ) = 0.217 \angle 32.5^\circ \text{ A}$$



شكل ١٢ - ٢٦

١٢-٢٦ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة في الشكل

١٢-٢٦ يتكون من مقاومة لقيمة  $R_L$  .  
 فأوجد قيمة  $R_L$  التي تكون منها القدرة الممتصة  
 بالحمل أكبر ما يمكن . حين قيمة أكبر قدرة .

تنتقل أكبر قدرة للحمل عندما

$$R_L = |Z_s| = 10 + j20 = 22.4 \text{ ohms}$$

$$I = V / (Z_s + R) = (50 \angle 0^\circ) / (10 + j20 + 22.4) = 1.31 \angle -31.7^\circ \text{ A}$$

وأكثر قدرة تعطي للحمل هي

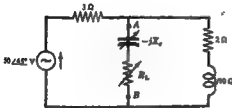
$$P = I^2 R_L = (1.31)^2 22.4 = 38.5 \text{ watts.}$$

١٢-٢٦ إذا كان الحمل المتصل بالدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٢٦ يتكون من مقاومة مركبة  $Z_L$  التي لها كل من  $R_L$  و  $X_L$  متغيرة ، فحين قيمة  $Z_L$  التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة .

لنتقل أكبر قدرة عندما يكون  $Z_L = Z_s^*$  ، وبما أن  $Z_s = 10 + j20 \Omega$   $Z_L = 10 - j20 \Omega$

إذاً المقاومة الكلية للدائرة هي  $Z_{eq} = (10 + j20) + (10 - j20) = 20 \Omega$

$$I = V / Z_{eq} = (50 \angle 0^\circ) / 20 = 2.5 \angle 0^\circ \text{ A} \quad \text{و} \quad P = I^2 R_L = (2.5)^2 10 = 62.5 \text{ watts}$$



شكل ١٢ - ٢٧

١٢-٢٧ إذا كان الحمل المتصل بين التآيين  $AB$  لشبكة

الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٧

يتكون من مقاومة متغيرة  $R_L$  وممانعة سعوية  $X_C$

تغير قيمتها بين  $20 \Omega$  و  $8 \Omega$  ، فحين  $R_L$  و  $X_C$

التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب أكبر

قدرة  $P$  ممتصة للحمل .



إن جهد ثلثين بين الطرفين  $AB$  هو  $V' = \frac{50 \angle 45^\circ}{5 + j10} (2 + j10) = 45.6 \angle 60.3^\circ \text{ V}$  ومعاوقة الشبكة

الكهربائية الفعالة المتصلة بين النقطتين  $AB$  هي  $Z' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2.64 + j0.72 \Omega$

وحيث أن  $Z_L = Z'^* = 2.64 - j0.72 \Omega$  المتطابقة عندنا

الشرط المحلي في المسألة هو أن  $X_C$  تتغير قيمتها بين  $2\Omega$  و  $8\Omega$  ، إذن أقرب قيمة لـ  $X_C$  هي  $2\Omega$

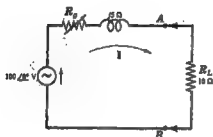
$$R_L = |Z_g - jX_C| = |2.64 + j0.72 - j2| = |2.64 - j1.28| = 2.93 \text{ ohms}$$

والآن لدينا

$$Z_T = Z' + Z_L = (2.64 + 2.93) + j(0.72 - 2) = 5.57 - j1.28 = 5.70 \angle -13^\circ \Omega$$

إذن

$$I = \frac{V'}{Z_T} = \frac{45.6 \angle 60.3^\circ}{5.70 \angle -13^\circ} = 8.0 \angle 73.3^\circ \text{ A} , \quad P = I^2 R_L = (8.0)^2 \cdot 2.93 = 187.5 \text{ W}$$



شكل ١٢ - ٢٨

١٢-١٨ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ٢٨ تغيير

قيمة المقاومة  $R_g$  بين  $2\Omega$  و  $5\Omega$  .

ما هي قيمة  $R_g$  التي ينتج عنها انتقال أكبر

قدرة عبر الطرفين  $AB$  ؟

بما أن مقاومة الحمل  $R_L$  في الدائرة

المسماة ثابتة ، إذن نظريات انتقال أكبر قدرة

لا تنطبق في هذه الحالة . ومن الواضح أن

أكبر تيار ينتج عندما  $R_g$  تكون أقل

ما يمكن .

بوضع  $R_g = 2\Omega$  ، إذن

$$Z_T = (2 + j5 + 10) = 13 \angle 22.6^\circ \Omega$$

$$I = V/Z_T = 100 \angle 0^\circ / (13 \angle 22.6^\circ) = 7.7 \angle -22.6^\circ \text{ A}$$

وأكبر قدرة هي

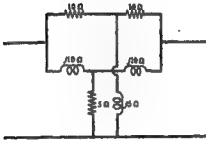
$$P = (7.7)^2 \cdot 10 = 593 \text{ W.}$$

### مسائل التأسيسية

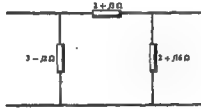
١٩-١٢ أوجد مجموعة الماووقات المتصلة على شكل النجمة المكافئة لمجموعة الماووقات المتصلة على شكل دلتا والموضحة

في الشكل ١٢ - ٢٩ .

الجواب :  $\Omega (1 + j3), \Omega (3 - j1), \Omega (0.5 - j0.5)$



شكل ١٢ - ٣٠



شكل ١٢ - ٢٩

٢٠-١٢ تتركب الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٠ من دالتين متصلتين على التوازي كل منهما على شكل النجمة .

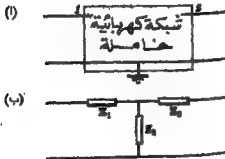
أوجد مجموعة المكافئة لها بحيث تكون على شكل دلتا واحدة .

الجواب :  $\Omega (5 + j5), \infty, \Omega (5 + j5)$

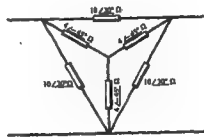
٢١-١٢ في الشكل ١٢-٣١ وصلت مجموعة دلتا المتزنة والتي لها  $Z = 10 \angle 30^\circ \Omega$  على التوازي مع مجموعة النجمة

المتزنة والتي لها  $Z = 4 \angle -45^\circ \Omega$  . أوجد مجموعة النجمة المكافئة لها .

الجواب :  $Z = 2.29 \angle -3.5^\circ \Omega$



شكل ١٢ - ٣٢

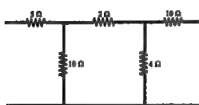


شكل ١٢ - ٣١

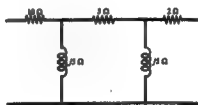
٢٢-١ بين أنه يمكن مرمو ابدال الشبكة الكهربائية الخاملة ذات النهايات الثلاث والموضحة في الشكل ١٢ - ٢٢ (أ) بدائرة متصلة على شكل النجمة مثل الموضحة في الشكل ١٣-٢٢ (ب) ، حيث  $Z_3 = (\Delta_{11} - \Delta_{12})/\Delta_3$  و  $Z_2 = \Delta_{12}/\Delta_3$  و  $Z_1 = (\Delta_{22} - \Delta_{12})/\Delta_3$  ، تشير  $\Delta_3$  والمعادلات المشتركة إلى معادلات جهد العقد في الصيغة المصفوفية .

٢٢-٢ استخدم طرق المألة ١٢ - ٢٢ وذلك لإبدال الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٢٢ بدائرة مكافئة معصلة على شكل النجمة .

الجواب :  $(12 + j1) \Omega, (-1 + j2) \Omega, (4 + j1) \Omega$



شكل ١٢ - ٢٢



شكل ١٢ - ٢٣

٢٤- أوجد الثلاثة معادلات المتصلة على شكل النجمة والتي تكافئ الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٢٤

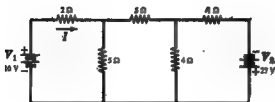
الجواب :  $0.25 \Omega, 2.5 \Omega, 10.5 \Omega$

٢٥- بالإشارة إلى الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٢٤ أوجد دائرة دلتا المكافئة لها .

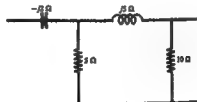
الجواب :  $10.25 \Omega, 43 \Omega, 17.2 \Omega$

٢٦- أوجد دائرة دلتا المكافئة للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٢٥ .

الجواب :  $(3 - j2) \Omega, (2 + j3) \Omega, (2 + j16) \Omega$



شكل ١٢ - ٢٦



شكل ١٢ - ٢٥

٢٧ - ١٢ باستخدام نظرية التراكب أوجد التيار المار في المقاومة  $2\Omega$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٦.

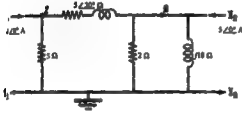
الجواب :  $I = 4.27 \text{ A}$

٢٨ - ١٢ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٦ إذا تغير مصدر الجهد  $V_2$  إلى  $8.93 \text{ V}$  وذلك مع احتيا النهاية الموجبة له إلى أعلى ، فأوجد باستخدام نظرية التراكب التيار المار في المقاومة  $2\Omega$  .

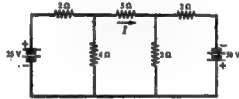
الجواب :  $I = 1.43 \text{ A}$

٢٩ - ١٢ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٣٧ التيار المار في المقاومة  $5\Omega$  نتيجة لكل مصدر من مصدري الجهد .

الجواب :  $2.27 \text{ A}, 3.41 \text{ A}$



شكل ١٢ - ٢٨



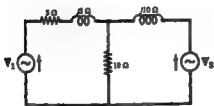
شكل ١٢ - ٣٧

٣٠ - ١٢ عين لشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٣٨ مركبات جهد المقننة  $V_2$  الناتجة عن كل مصدر من مصادر التيار .

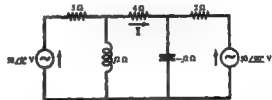
الجواب :  $8.48 \angle -28.9^\circ \text{ V}, 8.20 \angle 12.2^\circ \text{ V}$

٣١ - ١٢ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٣٩ . أوجد التيار المار في المقاومة  $4\Omega$  والناتج عن كل مصدر من مصدري الجهد .

الجواب :  $3.24 \angle 60.9^\circ \text{ A}, 6.16 \angle -142.2^\circ \text{ A}$



شكل ١٢ - ٤٠



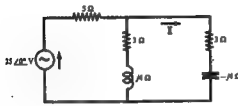
شكل ١٢ - ٣٩

٣٢ - ١٢ إذا فرضنا في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٠ أن مصدري الجهد يؤثر كل منهما في الدائرة على حدة . فلماذا كان التياران الناتجان في المقاومة  $10\Omega$  متساويين . فاعط قيمة النسبة  $V_1/V_2$  ؟

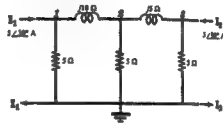
الجواب :  $0.707 \angle 45^\circ$

١٢-٢٢ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤١ مركبات جهد العقدة  $V_2$  الناتجة من كل مصدر من مصادر التيار  $I_1$  و  $I_2$  .  
الجواب :  $5.82 \angle -5.5^\circ \text{ V}, 9.22 \angle 72.9^\circ \text{ V}$

١٢-٢٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤١ إذا تغير مصدر التيار  $I_2$  إلى  $3.16 \angle 191.6^\circ \text{ A}$  فعين جهد العقدة  $V_2$  باستخدام نظرية التراكب .



شكل ١٢ - ٤٢



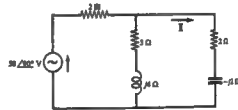
شكل ١٢ - ٤١

١٢-٢٥ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٤١ أوجد التيار  $I$  المار في المقاومة  $4\Omega - 3$  . طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .  
الجواب :  $2.27 \angle 53.2^\circ \text{ A}$

١٢-٣٩ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٤٣ أوجد التيار  $I$  المار في المقاومة  $2\Omega - 2$  . طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .  
الجواب :  $10.1 \angle 129.1^\circ \text{ A}$



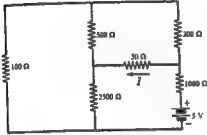
شكل ١٢ - ٤٤



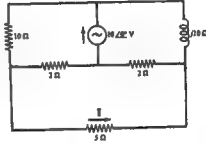
شكل ١٢ - ٤٣

١٢-٣٧ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢ - ٤٤ أوجد التيار المار في المقاومة  $4\Omega$  طبق نظرية التبادل وقارن بين التيارين . ما هو التغير في التيار المار في الفرعين  $5\Omega$  و  $2\Omega$  ؟  
الجواب :  $2.5 \text{ A}$  ، بعد تطبيق نظرية التبادل نجد أن تيار الفرعين  $5\Omega$  و  $2\Omega$  يساوي صفراً . وكان التيار المار فيما قبل ذلك يساوي  $2 \text{ A}$  و  $5 \text{ A}$  على الترتيب .

٣٨-١٧ أوجد في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٥-١٢ التيار المار في المقاومة  $5\Omega$ . طبق نظرية التبادل ثم قارن بين التيارين .  
الجواب :  $0.270 / 53.75^\circ \text{ A}$



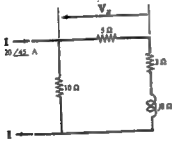
شكل ١٢ - ٤٦



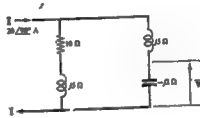
شكل ١٢ - ٤٥

٣٩-١٧ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٦-١٢ احسب التيار  $I$  المار في المقاومة  $50\Omega$ . طبق نظرية التبادل وذلك بتغير موضع مصدر الجهد والتيار الناتج  $I$ .  
الجواب :  $1.32 \text{ m A}$

٤٠-١٧ في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٧-١٢ عين الجهد  $V_x$ . ثم طبق نظرية التبادل وقارن بين الجهدين .  
الجواب :  $35 / -12.1^\circ \text{ V}$



شكل ١٢ - ٤٨

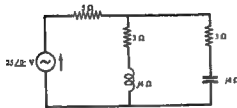


شكل ١٢ - ٤٧

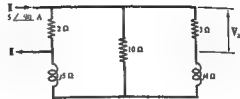
٤١-١٧ أوجد  $V_x$  في الدائرة الموضحة في الشكل ٤٨-١٢ ثم طبق نظرية التبادل .  
الجواب :  $30.8 / 21^\circ \text{ V}$

٤٢-١٧ أوجد الجهد  $V_x$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ٤٩-١٢. غير موضع مصدر التيار والجهد  $V_x$  وحقن نظرية التبادل .

الجواب :  $2.53 / -162.3^\circ \text{ V}$



شكل ١٢ - ٥٠



شكل ١٢ - ٤٩

١١-٤٣ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٠ ابدل المقاومتين  $3 + j4\Omega$  و  $3 - j4\Omega$  بالتصليتين على التوازي بمصدر جهد معادل ، كماغيار أوجد التيار المار في المقاومة  $5\Omega$  قبل وبعد التحويل .

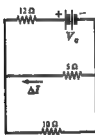
الجواب :  $V_p = 11.35 \angle 0^\circ V, I = 2.73 \angle 0^\circ A$

١٠-٤٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٠ ابدل المقاومة  $5\Omega$  بمصدر جهد معادل ثم أوجد التيار الكلي الناتج من المصدر  $25 \angle 0^\circ V$  قبل وبعد التحويل .

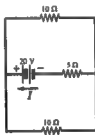
الجواب :  $V_p = 13.65 \angle 0^\circ V, I = 2.73 \angle 0^\circ A$

١-٤٥ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥١ ابدل كل مجموعة مقاومات متصلة على التوازي بمصدر جهد معادل ثم احسب التيار الكلي الخارج من المصدر  $50 \text{ volt}$  .

الجواب :  $11.35 V, 4.55 A, 3.41 A$

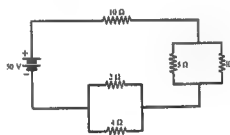


(ب)



(١)

شكل ١٢ - ٥٢

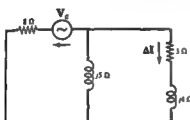


شكل ١٢ - ٥١

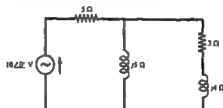
١٩- في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٢ (أ) يحتوي مصدر الجهد  $20 \text{ volt}$  على تيار  $I$  ، فإذا تغير التيار الخارج من المصدر إلى  $I'$  عندما تغيرت المقاومة  $10\Omega$  البطوية إلى  $12\Omega$  ، فأوجد التغير في التيار  $\Delta I$  ( $I' - I$ ) وذلك باستخدام مصدر الجهد المعادل كما هو موضح في الشكل ١٢-٥٢ (ب) .

الجواب :  $\Delta I = -0.087 A$

١٧-٤٧ : إذا تبعت المقاومة  $5 \Omega$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٣ (أ) إلى  $B \Omega$  فبين التغير  $\Delta I$  الناتج في التيار المار في المقاومة  $3 + j6$  الجواب :  $0.271 / 159.5^\circ A$



(ب)



(١)

شكل ١٢ - ٥٣

١٧-٤٨ : يحترق المصدر  $50/45^\circ V$  في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٤ (أ) على تيار  $I$  . فإذا تبعت المقاومة  $10 \Omega$  إلى  $5 \Omega$  ، فأوجد  $V_o$  و  $\Delta I$  الموضحين في الشكل ١٢-٥٤ (ب) وذلك باستخدام نظرية التبادل . الجواب :  $21.45 / 166^\circ V, 2.74 / -36^\circ A$



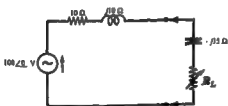
(ب)



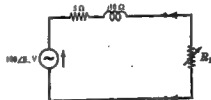
(١)

شكل ١٢ - ٥٤

١٧-٤٩ : في الدائرة الموضحة في الشكل ١٢-٥٥ أوجد قيمة  $R_L$  التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة . احسب قيمة أكبر قدرة . الجواب :  $11.17 \text{ ohms}, 309 \text{ W}$



شكل ١٢ - ٥٦

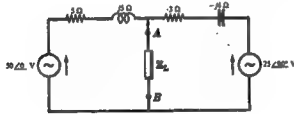


شكل ١٢ - ٥٥



١٢-٥٠ إذا كان الحمل في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٦ يتكون من عاتمة سموية ثابتة مقدارها  $15 \Omega$  ومقاومة متغيرة  $R_L$  . فأوجد (١) : قيمة  $R_L$  التي ينتج عنها أكبر قدرة ، (ب) قيمة أكبر قدرة .  
الجواب : (١)  $R_L = 11.17 \Omega$  (ب)  $236 \text{ W}$

١٢-٥١ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٢-٥٧ يؤثر مصدر جهد حل معاوقة الحمل المتصلة بالنهايتين  $A, B$  ، فإذا تغير كل من المعاملة ومقاومة الحمل - فما هي معاوقة الحمل  $Z_L$  التي تستقبل أكبر قدرة ؟  
الجواب :  $(4.23 + j1.15) \Omega, 5.68 \text{ W}$



شكل ١٢ - ٥٧

## الفصل الثالث عشر

### الحث التبادلي

#### مقدمة :

تتكون الشبكات الكهربائية التي درست في الفصول السابقة من مسارات مغلقة أو شبكات فرعية وعقد . وبما أن كل مسارين مغلقين لهما عقد مشتركة وكل عقدتين مرتبطتين بمناصر خاملة أو لداعة ؛ فإنه يقال إن الشبكات الفرعية والعقد مرتبطة توصيلياً وقد أعطيت طرق حل هذه الشبكات الكهربائية .

وفي هذا الفصل نحال نوعاً آخر من الارتباط يسمى الارتباط المغناطيسي . وعندما تأخذ في الاعتبار تفاضل مسارين مغلقين خلال مجال مغناطيسي بدلاً من خلال عناصر مشتركة فإنه يقال إن المسارات المغلقة مرتبطة حثياً أو مغناطيسياً .

#### الحث الذاتي :

عندما يتغير التيار في دائرة كهربائية ، فإن الفيض المغناطيسي المتعد في الدائرة نفسها يتغير وينتج قوة دافعة كهربائية تأثيرية في الدائرة . ويفترض أن لقاذبة الوسط ثابتة لأن القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية تتناسب مع معدل تغير التيار ، أي أن

$$(1) \quad \mathcal{E}_L = L \frac{dI}{dt}$$

حيث يسمى ثابت التناسب  $L$  بالحث الذاتي للدائرة . ووحدة الحث الذاتي هي henry (H) وتسمى القوة الدافعة الكهربائية التأثيرية الناتجة في ملف عدد لفاته  $N$  بالمعادلة

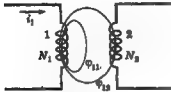
$$(2) \quad \mathcal{E}_L = N \frac{d\phi}{dt}$$

حيث  $N d\phi$  هو الفيض المتعد في الدائرة . من المعادلتين (1) . (2) نحصل على

$$(3) \quad L \frac{dI}{dt} = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$(4) \quad L = N \frac{d\phi}{dI}$$

ومن هنا نجد أن



شكل ١٣ - ١

### الحث المتبادل :

اعتبر أن التيار  $i_1$  المار في الملف ١ في الشكل ١٣ - ١ يتغير مع الزمن . وعلى ذلك فإن التيار المتغير  $i_1$  ينتج عنه فيض مغناطيسي  $\Phi_{11}$  . جزء من هذا الفيض يمتد داخل الملف فقط ويسمى بالفيض المقرب  $\Phi_{11}$  . أما الفيض الباقى  $\Phi_{21}$  فهو يمتد في الملف ٢ كما هو موضح في الرسم . ويسمى الجهد التأثيرى في الملف ٢ بقانون فاراداي :

$$(٣) \quad v_2 = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

بما أن  $\Phi_{21}$  تعتمد على التيار  $i_1$  فإن  $v_2$  يتناسب مع معدل تغير  $i_1$  ، أو

$$(٤) \quad v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

حيث يسمى ثابت التناسب  $M$  بالحث المتبادل بين الملفين . ووحدة الحث المتبادل هي نفس وحدة الحث الذاتي (H) . من المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن

$$v_2 = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

$$(٥) \quad M = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{di_1}$$

وفي حالة لف مجموعة من الملفات حول قلب حديدي واحد فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة غير خطية ويسمى الحث المتبادل في هذه الحالة بالمعادلة (٥) . أما إذا كان له وسط المعدن في الملفات هو الهواء فإن العلاقة بين الفيض والتيار تكون علاقة خطية ويسمى الحث المتبادل في هذه الحالة بالمعادلة

$$(٦) \quad M = \frac{N_1 N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

والرابط المتبادل ذو جاتين ، أى أننا نحصل على نتائج مشابهة إذا مر تيار  $i_2$  يتغير مع الزمن في الملف ٢ الموضح في الشكل ١٣ - ١ في هذه الحالة يكون الفيض الممتد هو  $\Phi_{21}$  و  $\Phi_{22}$  و  $\Phi_{21}$  و  $\Phi_{22}$  ويسمى الجهد التأثيرى في الملف ١ بالمعادلة  $v_1 = M(di_2/dt)$  . وتصيح المعادلتان (٥) ، (٦) على الصورة التالية على الترتيب .

$$(٧) \quad M = \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} \quad M = \frac{N_1 d\Phi_{21}}{di_2}$$

### معامل الربط $k$ :

يعتمد اللبش الممتد في الشكل ١٣ - ١ على المسافة الفاصلة بين محوري الملفين وعلى اتجاههما وكذلك على كثافة الوسط . ويسمى جزء اللبش الذي يمتد في الملفات من اللبش الكلي بمعامل الربط  $k$  . أي أن

$$(٨) \quad k = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2}$$

حيث  $\Phi_1 \leq \Phi_2$  و  $\Phi_{21} \leq \Phi_2$  ، وأكبر قيمة لـ  $k$  تساوي الوحدة .

ويمكن الحصول على تعبير لـ  $M$  بدلالة الحثين الذاتي  $L_1$  و  $L_2$  كما يلي :

بضرب المعادلة (٦) في المعادلة (٨) نحصل على

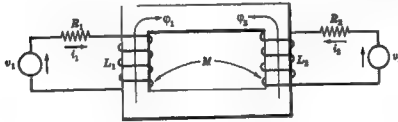
$$(٩) \quad M^2 = \left( \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1} \right) \left( \frac{N_1 \Phi_{21}}{i_2} \right) = \left( \frac{N_2 k \Phi_1}{i_1} \right) \left( \frac{N_1 k \Phi_2}{i_2} \right) = k^2 \left( \frac{N_1 \Phi_1}{i_1} \right) \left( \frac{N_2 \Phi_2}{i_2} \right)$$

بالتعويض من  $N_1 \Phi_1 / i_1 = L_1$  و  $N_2 \Phi_2 / i_2 = L_2$  في (٩) نحصل على

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{و} \quad M^2 = k^2 L_1 L_2$$

### تحليل الدوائر المترابطة :

لنوضح اتجاه الكف وتأثيره على الجهود الحثية التبادلية نرى في شكل ١٣ - ٢ ملفين ملفوفين على قلب ح.



شكل ١٣ - ٢

حيث أن كل دائرة تتحوى على مصدر الجهد فإننا نختار تيارات الشبكة  $i_1$  و  $i_2$  في نفس اتجاه المصادر ثم نكتب معادلات الشبكة باستخدام قانون كيرشوف للجهد .

$$(١٠) \quad \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= V_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} &= V_2 \end{aligned}$$

ولتحدد قطبية جهود الحث المتبادل على اتجاه الكف . ولندرج الإشارة الصحيحة في المعادلة (١٠) نطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف ، مع جعل الأصابع تلف في اتجاه التيار المقروء . وفي هذه الحالة يشير إبهام اليد اليمنى إلى اتجاه اللبش . وبالتالي يكون

الاتجاه الموجب للكيتين  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  كما هو مبين بالشكل . إذا كان الفيضان  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  الناتجان عن التيارات الموجبة المفروضة يساعد كل منهما الآخر ، فإن إشارات الجهود الحثية المتبادلية تكون مثل إشارات الجهود الحثية الذاتية . وبالإشارة إلى الشكل ١٣ - ٢ نلاحظ أن اتجاه كل من  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  يماثل كل منهما الآخر . وبإعادة كتابة المعادلة (١٠) بالإشارات الصحيحة نحصل على .

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= v_1 \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= v_2 \end{aligned} \quad (11)$$

وبفرض مصادر جيبية للتيار فإن مجموعة المعادلة (١١) في الحالة الجيبية المستقرة تصبح

$$\begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega M I_2 &= V_1 \\ -j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 &= V_2 \end{aligned} \quad (12)$$

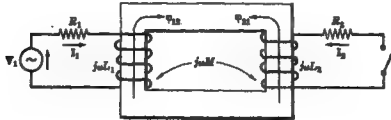
وبالرجوع إلى المجموعة العامة لمعادتي تيار الشبكة الأيتين ( الفصل التاسع ) نحصل على

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 \pm Z_{12}I_2 &= V_1 \\ \pm Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 &= V_2 \end{aligned} \quad (13)$$

ولقد وجدنا أن  $Z_{21} = Z_{12}$  هما المعاوقاتان المشتركتان لتيارى الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  . والشبكات الفرعية مرتبطة توصيلياً بذلك لمرور التيارات في فرع مشترك . والآن لدينا الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢ مجموعة معادلات مشابة للمعادلات (١٣) ، وفي الأول  $j\omega M I_1$  تقابل  $Z_{21}$  و  $Z_{12}$  الموجودين في المعادلتين (١٣) . والشبكات الفرعية غير مرتبطة توصيلياً وذلك لأن التيارين ليس لهما معاوقات مشتركة . وعلى ذلك فالمعادلات تدل على عدم وجود ارتباط وفي هذه الحالات فإن الارتباط يسمى بالارتباط المتبادل أو الارتباط المغناطيسي .

#### التيار الحثي:

لقد درسنا في الفقرة السابقة دائرة تتكون من مسارين مغلقين مرتبطين تبادلياً يتدفق كل منهما على مصدر جهد وذلك بعد فرض الاتجاهات الصحيحة للتيارات . ولتضمننا في نفس الوقت دراسة التيار الحثي الناتج في مسار مغلق لا يتدفق على جهود دافعة أو محررة . ويتحدد اتجاه هذا التيار بتطبيق قانون لينز .

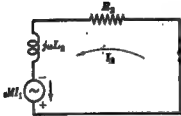


شكل ١٣ - ٢

احتر الدائرة الموصلة في الشكل ١٣ - ٣ والتي فيها الشبكة الفرعية 1 هي فقط التي تحتوي على جهد محرك . فختار التيار  $I_1$  بحيث يتفق اتجاهه مع المصدر  $V_1$  ونطبق قاعدة اليد اليمنى لتحديد اتجاه الفيض  $\Phi_{21}$  . والآن فإن قانون لينز ينص على أن قطبيه الجهد التأثيري تكون بحيث إذا أكلنا الدائرة فإن التيار يمر خلال الملف في اتجاه يصحده بحيث يكون الفيض الناتج مراكماً للفيض الأصل الناتج من التيار  $I_1$  . وعلى هذا فهند إغلاق المفتاح في دائرة الشكل ١٣ - ٣ يكون اتجاه الفيض  $\Phi_{21}$  كما هو مبين في الشكل وذلك تبعاً لقانون لينز . والآن تطبيق قاعدة اليد اليمنى مع جبل الابهام يشير إلى اتجاه  $\Phi_{21}$  فإن الأصابع سوف تدور حول الملف 2 في اتجاه التيار الطبيعي . وتكون إذن مصادات تيار الشبكة هي

$$(R_2 + j\omega L_2)I_2 - j\omega M I_1 = V_2 \quad (14)$$

$$-j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2)I_2 = 0$$



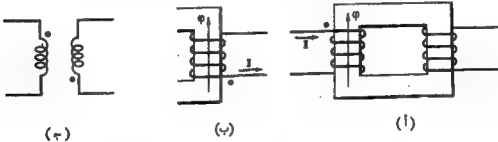
شكل ١٣ - ٤

وبما أن الشبكة الفرعية 2 لا تحتوي على جهد وبالتالي فإن التيار الطبيعي  $I_2$  ينتج من الجهد التأثيري المتبادل  $(R_2 + j\omega L_2)$  ،  $I_2 = (j\omega M I_1)$  . وفي الشكل ١٣ - ٤ رسم هذا الجهد كمنحدر جهد . واتجاه هذا المصدر يجب أن يكون كما هو موضح بالرسم وذلك مع فرض اتجاه موجب للتيار  $I_2$  . وعلى هذا  $\Phi$  فإن القطبية الحثية للجهد التأثيري المتبادل في الملف الثاني تكون موجبة عند الطرف الذي يترك منه التيار الطبيعي الملف  $\Phi$  .

### قاعدة النقطة المتقاطعة :

في حين أنه يمكن تبين القطبية النسبية للجهود التأثيرية المتبادلية برسم قلب الملفات التي يوضح اتجاه الفل ، فإن هذه الطريقة غير عملية . ولتبسيط الرسم التوضيحي الذي يمثل الدوائر المترابطة ، فإننا نميز رسم الملفات بنقطة كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٥ (ج) . وذلك بوضع نقطة عند الأطراف التي لها نفس القطبية الحثية على أساس التأثير المتبادل فقط . ولتطبيق نظام النقطة فإننا يجب أن نعرف عند أي طرف من الملف يجب وضع النقطة . وعلاوة على ذلك فإننا يجب أن نعين الإشارة اللازمة للجهود التأثيرية المتبادل عند كتابة مصادات تيار الشبكة .

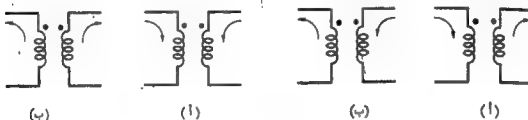
ولوضع النقط على زوج من الملفات المترابطة ، فإننا نختار اتجاه تيار في ملف من الملفين ونضع نقطة عند الطرف الذي يدخل منه التيار إلى الملف . ويكون الطرف ذو النقطة موجباً خطياً بالنسبة إلى الطرف الآخر للملف . لتطبيق قاعدة اليد اليمنى لإيجاد الفيض المقابل كما هو موضح في الشكل ١٣ - ٥ (أ) . والآن فإنه تبعاً لقانون لينز فإن الفيض في الملف الثاني يجب أن يماكس الفيض الأصل . انظر شكل ١٣ - ٥ (ب) .



شكل ١٣ - ٥

نستخدم قاعدة اليد اليمنى لإيجاد اتجاه التيار الطبيعي ، وحيث أن الجهد التآثري المتبادل يكون موجبا عند الطرف الذي يترك منه التيار الطبيعي الملف ، فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف كما هو موضح في الشكل ١٣-٥ (ب) . وبإصاء التغطية المحيطة الملفات بواسطة النقط فإننا نحتاج إلى رسم قلب الملفات وبذلك يمكن رسم الملفات المترابطة كما في الشكل ١٣-٥ (٥) .

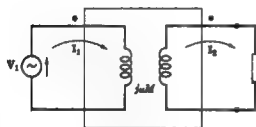
لتعين إشارة الجهد التآثري المتبادل في معادلات تيار الشبكة فإننا نستخدم قاعدة النقطة التي تنص على أن :  $(\pm)$  عندما تدخل أو تخرج التيارات المفروضة إلى زوج من الملفات المترابطة عند الطرف الذي عنده النقطة فإن إشارات الحدود  $M$  تكون نفسها إشارات الحدود  $L$  ؛ (٢) إذا دخل أحد التيارات من الطرف الذي عنده النقطة بينما خرج الآخر من الطرف الذي عنده النقطة فإن إشارات الحدود  $M$  تكون معاكسة لإشارات الحدود  $L$  .



شكل ١٣-٦

شكل ١٣-٦

يوضح الشكل ١٣-٦ حالتين فيما إشارات الحدود  $M$  و  $L$  متماكة . ويوضح الشكل ١٣-٧ حالتين فيما الحدود  $L$  و  $M$  لها نفس الإشارات .



شكل ١٣-٨

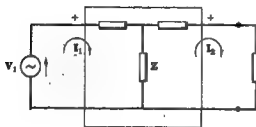
ولزيادة توضيح العلاقة النسبية المتصلة بدائريتين مرتبطتين تبادليا لمعبر الدائرة الموصلة في الشكل ١٣-٨ وفيها تم وضع النقط واختيار التيارات  $I_1$  و  $I_2$  كما هو موضح . وبما أن أحد التيارات يدخل عند الطرف الذي عنده النقطة ، فإن إشارة الحدود  $M$  تكون معاكسة لإشارة الحدود  $L$  . وتكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية لهذه الدائرة هي

$$(١٥) \begin{bmatrix} Z_{11} & -j\omega M \\ -j\omega M & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لمعبر الآن شبكتين فرعيتين بسيطتين مترابطتين توصيليا كما هو موضح في الشكل ١٣-٩ وفيها تم تعيين الأطراف الموجبة . إن معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$(١٦) \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z \\ -Z & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وتظهر المعادلة المشتركة  $Z$  تيارات الشبكة بإشارة سالبة وذلك لأن التيارين  $I_1$  و  $I_2$  يمران في اتجاهين معاكسين في الفرع الذي يحتوي على  $Z$  .



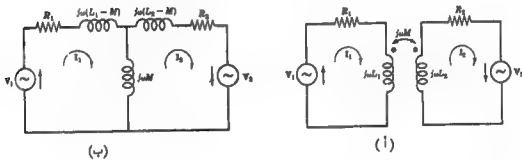
شكل ١٣-٩

وعند تطبيق المصاديق الموضحة في الشكلين ١٣ - ٨ ، ١٣ - ٩ فإن الدالتين تظهران متطابقتان فيما حداً الترميز النقطي في إحدى الدالتين والرميز بالإشارات في الأخرى . بمقارنة (١٥) و (١٦) فإن الإشارة السالبة لـ  $j\omega M$  تقابل الإشارة السالبة لمعادلة  $Z$  .

### الدوائر المكافئة المتصلة توصيلياً :

يمكن تحليل إدخال الدائرة المترابطة بتبادلياً بدائرة مكافئة مترابطة توصيلياً . نعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) ونختار اتجاهي التيارين  $I_1$  و  $I_2$  كما هو موضح في الشكل . فتكون معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوفية هي

$$(١٧) \quad \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



شكل ١٣ - ١٠

نفرض اتجاهات التيار في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) هي نفسها في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) . والتياران  $I_1$  و  $I_2$  يمران في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين ، والمعادلة المطلوبة هنا هي  $j\omega M$  . نجد في المعادلة (١٧) أن  $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1$  ، وبما أن تيار الشبكة  $I_2$  يمر في الفرع المشترك الذي معاوقته  $j\omega M$  فإننا يجب أن ندخل  $(-j\omega M)$  في المسار الخلفى ونكتب

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 - j\omega M + j\omega M = R_1 + j\omega L_1$$

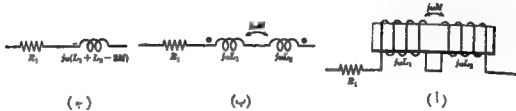
وبالمثل بالنسبة المسار الخلفى لثاني

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 - j\omega M + j\omega M = R_2 + j\omega L_2$$

وإذا كتبنا معادلات تيار الشبكة للدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) فإننا نحصل على مجموعة المعادلات (١٧) . وعلى ذلك فإن الدائرة المترابطة توصيلياً والموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (ب) تكافئ الدائرة المترابطة بتبادلياً والموضحة في الشكل ١٣ - ١٠ (أ) .

والطريقة السابقة في التحليل لا تعطينا دائماً دائرة مكافئة يمكن تحقيقها فيزيائياً - وهذا صحيح عندما  $M > L_1$  أو  $M > L_2$  . لإيجاد المثلين المرتبطين بتبادلياً والمتصلين على التوالي المبدئين في الشكل ١٣ - ١١ (أ) فإننا تتبع الطريقة التالية . نطبق أولاً الطرق السابقة لنحصل على الترميز للنقطي الموضح في الشكل ١٣ - ١١ (ب) لنعيد الآن الترميز النقطي المكافئ بدائرة توصيلية مكافئة كما في الشكل ١٣ - ١١ (ج) .





شكل ١٢ - ١١

ولتحليل الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ١١ (أ) فإنه يلزمنا اعتبار فيس متناطيس لتحديد إشارات الجهود التأثيرية المتبادلية . أما في دائرة الشكل ١٢ - ١١ (ب) فإنه لا يلزمنا اعتبار أي فيس ولكن يلزمنا قاعدة النقطة . ويمكن كتابة المعادلات اللازمة لدائرة الشكل ١٢ - ١١ (ج) بالطريقة المعتادة بصرف النظر عن الفيض أو التناثر المتبادل . والبرائر الثلاث ما جميعاً لنس المعادلة المركبة

$$Z = R_1 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

### مسائل محلولة

١٣ - ١ ملف يتكون من ملفين مترابطين يمر به تيار مستمر مقداره  $5A$  ، فإذا كان الفيض  $\Phi_{12}$  و  $\Phi_{21}$  المتساويين هما  $0.2mWb$  و  $0.4mWb$  على الترتيب ، وكان  $N_2 = 1500$  و  $N_1 = 500$  ، فأوجد  $L_2$  و  $L_1$  و  $M$  و  $k$  .

الفيش الكلي هو :  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = 6 \times 10^{-4}$  webers . إذن الحث الذاتي للملف الأول هو

$$L_1 = N_1 \Phi_1 / I_1 = 500(6 \times 10^{-4}) / 5 = 0.06 H$$

ومعامل الربط هو :  $k = \Phi_{12} / \Phi_1 = 0.4 / 0.6 = 0.667$

والحث المتبادل هو :  $M = N_2 \Phi_{12} / I_1 = 1500(4 \times 10^{-4}) / 5 = 0.12 H$

وبما أن  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  ،  $0.12 = 0.667\sqrt{0.06 L_2}$  ، فإن  $L_2 = 0.539 H$

١٣ - ٢ ملفان مترابطان هما  $L_1 = 0.8 H$  و  $L_2 = 0.2 H$  ومعامل الربط هما  $k = 0.9$  . أوجد الحث المتبادل  $M$  والنسبة بين عدد لفاتهما  $N_1/N_2$  .

الحث المتبادل هو :  $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.9\sqrt{0.8(0.2)} = 0.36 H$

وباستخدام المعادلة  $M = N_2 \Phi_{12} / I_1$  ، والتعويض فيها عن  $\Phi_{12} = k\Phi_1$  ثم ضربها في  $N_1/N_2$  نحصل على ،

$$N_1/N_2 = kL_2/M = 0.9(0.2)/0.36 = 0.5 \quad \text{و} \quad M = k \frac{N_2}{N_1} \left( \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} \right) \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} L_1$$

١٣ - ٣ ملفان مترابطان جهتا الذاتي على الترتيب هو  $L_1 = 0.5 H$  و  $L_2 = 0.20 H$  ومعامل الربط هما هو  $k = 0.5$  ، ومعد لفات الملف الثاني 1000 لفة . فإذا كان التيار المار في الملف الأول هو  $i_1 = 5 \sin 400t$  amperes ، فمبين الجهد في الملف الثالث وكذلك أكبر قيمة للفيش المحطى بالملف الأول .

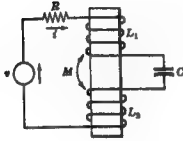
الجهد المتبادل هو :  $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.5\sqrt{0.05(0.20)} = 0.05 \text{ H}$  : إذن الجهد في الملف الثاني يعطى بالمعادلة  
 $N_2(d\phi_{12}/dt)$  وبما أن الجهد في الملف الثاني يعطى أيضاً بالمعادلة  $N_2(d\phi_{12}/dt) = 0.05 \frac{d}{dt}(5 \sin 400t) = 100 \cos 400t$  فإن

$$100 \cos 400t = 1000(d\phi_{12}/dt)$$

$$\phi_{12} = 10^{-3} \int 100 \cos 400t dt = 0.25 \times 10^{-3} \sin 400t \text{ Wb}$$

وأكبر قيمة لـ  $\phi_{12}$  هي  $0.25 \text{ m Wb}$  ، إذن أكبر قيمة للفيض هي :

$$\phi_{12 \text{ max}} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{0.5} = 0.5 \text{ mWb}$$



شكل ١٢ - ١٣

١٣ - طبق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٢ ثم اكتب المعادلة في الصيغة المصفوية .

ملاحظة : اتجاه لف الملفات يتضح أن إشارات حدود  $M$  تماكس إشارات حدود  $L$  ، ويلاحظ أيضاً أن الجهد التأثري المتبادل يظهر في كل ملف نتيجة لتيار الآخر في الملف الآخر .

$$Ri + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = v$$

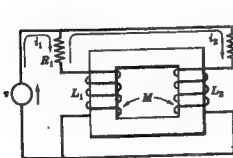
$$Ri + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v \quad \text{أو}$$

١٣ - ٥ اكتب معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوية للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ١٣ .

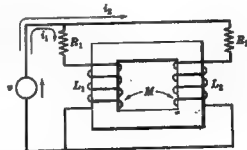
نختار تيار الشبكة  $i_1$  و  $i_2$  كما هو موضح بالرسم ونطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف . حيث أن الفيضين يساعد كل منهما الآخر فإن إشارة حدود  $M$  هي نفسها إشارة حدود  $L$  . إذن

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = v$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = v$$



شكل ١٣ - ١٣



شكل ١٣ - ١٣

٩-١٣ كرر المسألة ١٣ - مع أخذ تيار الشبكة  $i_2$  كما هو موضح في الشكل ١٣-١٤ .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق لتيار  $i_2$  فإن الجهود التأثيرية التبادلية تكون موجبة . إذن

$$R_2(i_2 - i_1) + L_2 \frac{di_2}{dt}(i_2 - i_1) + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$R_1(i_1 - i_2) + R_2 i_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}(i_2 - i_1) + L_2 \frac{di_2}{dt}(i_2 - i_1) - M \frac{di_1}{dt} = 0$$

١٣-٧ ملفان متصلان على التوالي لهما حث مكافئ  $L_A$  عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر وحث مكافئ  $L_B$  عندما كان التوصيل يماكس كل منهما الآخر . أوجد الحث المتبادل  $M$  بدلالة  $L_A$  و  $L_B$  .

عندما كان التوصيل يقوى كل منهما الآخر فإن الحث المكافئ يعطى بالمعادلة

$$(١) \quad L_A = L_1 + L_2 + 2M$$

وعندما كان التوصيل يماكس كل منهما الآخر فالتا نحصل على

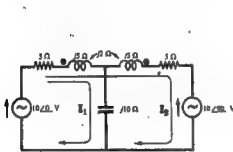
$$(٢) \quad L_B = L_1 + L_2 - 2M$$

ب طرح (٢) من (١) نجد أن

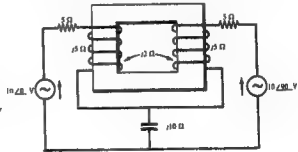
$$M = \frac{1}{2}(L_A - L_B) \quad \text{و} \quad L_A \cdots L_B = 4M$$

يشير هذا الحل إلى طريقة عملية لتحديد  $M$  وذلك بتوصيل الملفين بالطريقتين السابقتين وتعيين الحث المكافئ لهما عن طريق نقطة تيار متردد . ويكون الحث الناتج هو ربع الفرق بين الحثين المكافئين .

١٣-٨ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-١٥ . أوجد الجهد على الممانعة  $f 10 \Omega$  وذلك باستخدام الدائرة المكافئة .



شكل ١٣-١٦



شكل ١٣-١٥

لوضع النقط على الدائرة نعتبر نقط الملفين واتجاه لهما . يتحرك التيار في أعلى الملف الذي على اليسار وعلى ذلك فإننا نضع نقطة عند هذا الطرف . ويكون اتجاه الفيض المقابل لهذا التيار في الجهة اليسرى من القلب إلى أسفل . من قانون لينز نجد أن اتجاه الفيض في الملف الذي على اليمين يجب أن يكون إلى أعلى . وتغطي قاعدة اليد اليمنى اتجاه التيار الطبيعي . وهذا التيار يتحرك الملف عند الطرف العلوي الذي يجب في هذه الحالة ترميزه بنقطة كما هو موضح في الشكل

١٣-١٦

وبالاعتبار الموضح للتيارين  $I_1$  و  $I_2$  فإن معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوية تكون

$$\begin{bmatrix} 5 - j5 & 5 + j8 \\ 5 + j8 & 10 + j6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 - j10 \end{bmatrix}$$

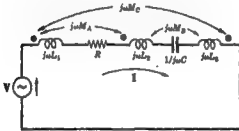
ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 5 + j8 \\ 10 - j10 & 10 + j6 \end{vmatrix}}{\Delta_0} = 1.015 \angle 113.95^\circ \text{ A}$$

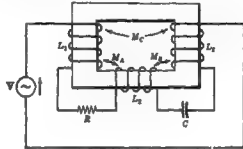
ويكون الجهد على المأينة  $10 \Omega$  - هو

$$V = I_1(-j10) = 10.15 \angle 23.95^\circ \text{ V}$$

١٣ - ٩ أوجد الدائرة المكافئة في الترميز النقطي للملفات المترابطة والموصلة في الشكل ١٣ - ١٧ ثم اكتب المعادلات المناظرة.



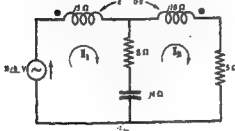
شكل ١٣ - ١٨



شكل ١٣ - ١٧

لنضع النقط باستخدام طرق المسألة ١٣ - ٨ لنحصل على الدائرة الموصلة في الشكل ١٣ - ١٨ . وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسار المغلق الوحيد نجد أن

$$\left[ R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega(L_1 + L_2 + L_3 + 2M_1 - 2M_2 - 2M_3) \right] I = V$$



شكل ١٣ - ١٩

١٣ - ١٠ في الشبكة الكهربية المترابطة الموصلة في الشكل ١٣ - ١٩

أوجد الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  وذلك بالنقط المطبقة

في الرسم . ثم احس قطبيه ملف واحد وكرر المسألة .

نحسب الحث المتبادل من العلاقة

$$jX_m = jk\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = j0.8\sqrt{5(10)} = j5.66 \Omega$$

ثم نوجد تيار الشبكة  $I_2$  .

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 + j1 & 50 \\ -8 - j1.66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 + j1 & -8 - j1.66 \\ -8 - j1.66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{171 \angle 29^\circ}{19.9 \angle 53.8^\circ} = 8.60 \angle 24.8^\circ \text{ A}$$

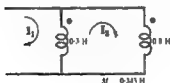
ويكون الجهد عبر المقاومة  $5 \Omega$  هو  $V_2 = I_2(5) = 43 \angle -24.8^\circ \text{ V}$

بتغيير تطبيق ملف واحد تأثير مصفوفة المعاوقة وينتج لدينا قيمة جديدة لتيار الشبكة  $I_2$  .

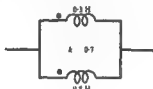
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j1 & 50 \\ -3 + j9.66 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 + j1 & -3 + j9.66 \\ -3 + j9.66 & 8 + j6 \end{vmatrix}} = \frac{505 \angle -72.7^\circ}{132 \angle -39.4^\circ} = 3.83 \angle -112.1^\circ \text{ A}$$

والجهد على المقاومة  $5 \Omega$  هو  $V_2 = I_2(5) = 19.15 \angle -112.1^\circ \text{ V}$

١١ - ١٢ أوجد الحث المكافئ للملفين  $L_1$  و  $L_2$  المتصلين على التوازي والموضحين في الشكل ١٣ - ٢٠ (أ)



(ب)



(أ)

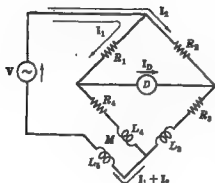
شكل ٢٠ - ١٣

الحث المتبادل هو  $M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.7\sqrt{0.3(0.1)} = 0.343 \text{ H}$  .  
(ب) وإدخال تيارات الشبكة نجد أن

$$[Z] = \begin{bmatrix} j\omega 0.3 & j\omega 0.043 \\ j\omega 0.043 & j\omega 0.14 \end{bmatrix}$$

$$Z_{\text{input}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{j\omega 0.3(j\omega 0.14) - (j\omega 0.043)^2}{j\omega 0.14} = j\omega 0.296 \Omega$$

والحث المكافئ للملفين المترابطين هو  $0.296 \text{ H}$  .



شكل ١٣ - ١١

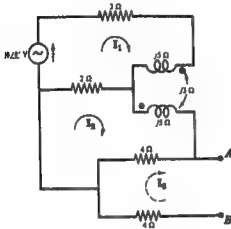
١٢ - ١٣ نستخدم قنطرة هيليسدي في تعيين الحث المتبادل بين ملفين .  
أوجد  $M$  بدلالة التيارات الأخرى للقنطرة عندما يكون التيار  $I_D$  يساوي صفرًا .

نختار تيارات الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  كما هو موضح في الرسم . إذا كان  $I_D = 0$  فإن الجهد على المقاومين  $R_2$  و  $R_3$  لا بد أن يكون متساويًا :

$$(1) \quad I_1 R_1 = I_2 R_2$$

وبالمثل فإن الجهد على كل من  $(R_3 + j\omega L_2)$  و  $(R_4 + j\omega L_1)$  يكون أيضًا متساويًا . وعلى ذلك فإنه يظهر جهد تأثيري متبادل عند  $I_D$  ويكون التيار في الملف الآخر  $I_2$  بمطوياً المجموع  $I_1 + I_2$  .

(٢)  $I_1(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M(I_1 + I_2) = I_2(R_2 + j\omega L_2)$   
 بالتعويض في (٢) بالمعادلة  $I_2 = (R_1/R_2)I_1$  نجد أن  
 (٢)  $I_1(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M) + (R_1/R_2)I_1(j\omega M) = (R_1/R_2)I_1(R_2 + j\omega L_2)$   
 وبمساراة : إجراء الحقيقية والتخيلية في المعادلة (٢) نجد أن  
 $M = \frac{R_1 L_2 - R_2 L_1}{R_1 + R_2}$  ،  $j\omega(L_1 + M + \frac{R_1}{R_2}M) = j\omega \frac{R_2}{R_1}L_2$  و  $R_1 R_2 = R_1 R_2$



شكل ٢٢ - ١٣

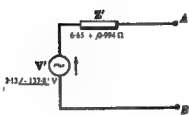
١٣-١ أهدأ الشبكة الكهربائية المترابطة والموضحة في الشكل  
 ١٣-٢ بدائرة ثنتين المكثفة بين الطرفين  $AB$ .  
 جهد ثنتين المكثف  $V'$  خرجة الدائرة المفتوحة  
 بين الطرفين  $AB$  . باعتبار تيارى الشبكة  $I_1$  و  $I_2$   
 كما هو موضح في الشكل والحصول على  $I_2$  نجد أن

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j6 & 10 \\ -2 + j8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j6 & -2 + j8 \\ -2 + j8 & 6 + j6 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{20 - j30}{10 + j67} = 0.533 \angle 137.8^\circ \text{ A}$$

والآن  $V' = V_{AB} = I_2(4) = 2.13 \angle 137.8^\circ \text{ V}$

ولتئين معاوقة ثنتين المكثفة  $Z'$  اعتبر تيارى الشبكة  
 ثالث  $I_2$  ثم احسب المعاوقة  $Z_{input}$  بين الطرفين  $AB$   
 وذلك مع وضع جميع المصادر الداخلية مساوية للصفر .

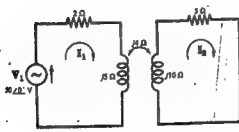


شكل ٢٣ - ١٣

$$Z' = Z_{input} = \frac{A_2}{A_{20}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 + j6 & -2 + j8 & 0 \\ -2 + j8 & 6 + j6 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 + j6 & -2 + j8 \\ -2 + j8 & 6 + j6 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{456}{10 - j67} = 6.74 \angle 8.5^\circ \Omega$$

والشكل ١٣-٢٣ يوضح دائرة ثنتين المكثفة .



شكل ٢٤ - ١٣

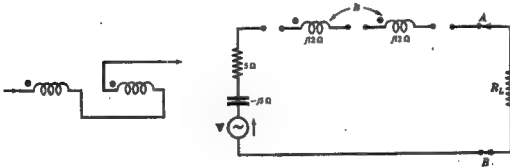
١٣-١٤ في دائرة المسارين المغلقين المترابطين والموضحة في  
 الشكل ١٣-٢٤ ، بين أن الترميز التفاضلي ليس  
 ضرورياً طالما أن المسار المغلق الثاني مسار حاصل :  
 نغضار تيارات الشبكة كما هو موضح في الشكل  
 ثم نحصل للحصول على  $I_2$  .

$$I_2 = \begin{vmatrix} 2 + j6 & 50 \\ \pm j4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 + j6 & \pm j4 \\ \pm j4 & 5 + j10 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-50(\pm j4)}{-24 + j4} = 3.92 / 61.9^\circ \pm 90^\circ \text{ A}$$

لا تتأثر قيمة  $\Delta$  بإشارة  $M$  ، وعلى ذلك فالتيار  $I_2$  له زاوية طور إما  $151.9^\circ$  أو  $-28.1^\circ$  ، حيث أنه لا يوجد مصدر للجهد في المسار المغلق فإنه ليس ضرورياً معرفة قطبية الجهد التأثيري التبادل . والمهبط في الجهد على معاومات المسار المغلق يجب أن يكون متساوياً في المقدار وبخلافاً بزاوية طور مقدارها  $180^\circ$  ، ولا تتأثر القدرة في المعاملة ، ومن الثابت أيضاً أن  $I_2$  مطابق لكلتا إشارتي التأثير التبادل .

١٢ - ١٥ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢٥ ، أوجد  $R_L$  التي ينتج عنها أكبر قدرة وذلك بعد الاختيار المناسب لتوصيل المئين  $k$  .



شكل ١٣ - ٢٥

شكل ١٣ - ٢٦

إن معاومة الدائرة على مسار  $AB$  يجب أن تكون أقل ما يمكن . وبالتعبير عن معاومة هذا الجزء في الدائرة نحصل على

$$Z = 5 - j5 + j12 + j12 \pm j2X_L = 5 + j19 \pm j2\sqrt{12(12)}\Omega$$

ولكن تكون قيمة المعاومة أقل ما يمكن فإن الممانعة يجب أن تكون مساوية للصفر . وعلى ذلك فإن الإشارة الصحيحة لبحث التبادل سالبة

$$k = 19/24 = 0.792 \text{ و } 19 - 2k\sqrt{12(12)} = 0$$

وبالتوسيل الموضح في الشكل ١٣ - ٢٦ ينتج عنه إشارة سالبة للجهد التأثيري التبادل كما هو المطلوب .

إذن معاومة الدائرة على مسار الطرفين  $AB$  هي مقاومة تقيتها  $5\Omega$  ، وينتج لدينا أكبر قدرة معسا

$$R_L = R_T = 5 \text{ ohms}$$

١٢ - ١٣ الدائرة الموضحة في الشكل ١٣ - ٢٥ لها مقاومة حمل  $R_L = 10 \Omega$  ومصدر  $V = 50 \angle 0^\circ$  مع اختيار اتجاه توصيل الملفين وأن  $k$  تتغير من 0 إلى 1 أوجد مدى تغير القدرة الممتصة لمقاومة الحمل .

بإختيار التوصيل الموضح في الشكل ١٣ - ٢٦ فإن الحث المتبادل يكون سالبا وتكون معاوقة الدائرة الكلية

بما فيها الحمل هي  $Z_T = 5 - j5 + j12 + j12 - j24k + 10 \Omega$  و بوضع  $k = 1$  ، إذن

$$Z_T = 15 - j5 = 15.8 \angle -18.45^\circ \Omega, I = \frac{V}{Z_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{15.8 \angle -18.45^\circ} = 3.16 \angle 18.45^\circ A$$

$$P = PR = (3.16)^2(10) = 100 W \text{ هي القدرة في المقاومة } 10 \Omega$$

والآن بوضع  $k = 0$  ، إذن

$$Z_T = 15 + j19 = 24.2 \angle 51.7^\circ \Omega, I = \frac{50 \angle 0^\circ}{24.2 \angle 51.7^\circ} = 2.06 \angle -51.7^\circ A$$

والقدرة في المقاومة  $10 \Omega$  هي  $(2.06)^2(10) = 42.4 \text{ watts}$  ونعنا  $k = 0.792$  فإن  $P_{\max} = 111 W$  .

بتغير توصيل الملفين ينتج لدينا إشارة موجبة الحث المتبادل . إذن المعاوقة تصبح  $Z_T = 15 + j19 + jk24 \Omega$

بوضع  $k = 1$  ، إذن

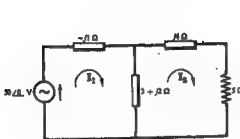
$$Z_T = 15 + j43 = 45.6 \angle 70.8^\circ \Omega, I = \frac{50 \angle 0^\circ}{45.6 \angle 70.8^\circ} = 1.095 \angle -70.8^\circ A$$

$$P = PR = (1.095)^2(10) = 12 W \text{ هي القدرة المناظرة هي}$$

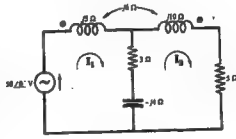
وعلى ذلك فإنه من المتوقع أن تكون القدرة في المقاومة  $10 \Omega$  في المدى من 12 W إلى 100 W .

١٢ - ١٧ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيلها الدائرة المرتبطة تباعديا والموضحة بالشكل ١٣ - ٢٧ لتطابق تيارى الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  كما هو موضح ثم نكتب المعادلة في الصيغة المصفوفية .

$$\begin{bmatrix} 8 + j1 & -8 - j8 \\ -8 - j8 & 8 + j8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$



شكل ١٣ - ٢٨

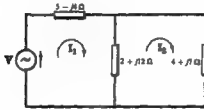


شكل ١٣ - ٢٧

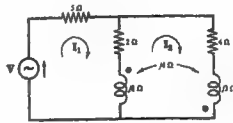


. نختار تيارات الشبكة في الدائرة المرتبطة توصيلها بنفس الاتجاه في الدائرة المرتبطة تبادلياً. من معروفة المعاوقة نجد أن  $Z_{11} = 3 - j2 \Omega$  وحيث أن التيارين المارين في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين فإن معاوقة الفرع المطلوبة هي  $3 + j2 \Omega$ . والآن فإن المعاوقة الذاتية لمسار الأول هي  $Z_{11} = 3 + j1 \Omega$ . وعلى ذلك فإننا نحتاج إلى معاوقة  $j1 \Omega$  في هذا المسار المفلق. وبالمثل بما أن  $Z_{22} = 8 + j6 \Omega$  فإن المسار المفلق يحتاج إلى المعاوقة  $5 + j4 \Omega$  وذلك بالإضافة إلى عناصر الفرع المشترك كما هو موضح في الشكل ١٣-٢٨.

١٣-٢٨ أوجد الدائرة المكافئة المرتبطة توصيلها بالشبكة الكهربائية المرتبطة تبادلياً والموضحة في الشكل ١٣-٢٩.



شكل ١٣ - ٢٨



شكل ١٣ - ٢٩

نختار تيارات الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  ونكتب معادلات تيار الشبكة في الصيغة المصفوية.

$$\begin{bmatrix} 7 + j8 & -2 - j12 \\ -2 - j12 & 6 + j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$$

في الدائرة المرتبطة توصيلها بمر تيارات الشبكة في الفرع المشترك في اتجاهين متعاكسين وحيث أن  $Z_{11}$  في مصفوفة المعاوقة هي  $3 - j2 \Omega$  ، فإن معاوقة هذا الفرع يجب أن تكون  $2 + j12 \Omega$ . وبالمثل نجد من مصفوفة المعاوقة أن  $Z_{11} = 7 + j8 \Omega$  و  $Z_{22} = 6 + j10 \Omega$  وعلى ذلك فإن المعاوقات الباقية في المسارين المفلقين 1 و 2 في الدائرة المكافئة هي حل الترتيب.

$$Z_2 = (6 + j10) - (2 + j12) = 4 + j10 \Omega \quad Z_1 = (7 + j8) - (2 + j12) = 5 - j4 \Omega$$

والشكل ١٣-٣٠ يوضح الدائرة المكافئة المرتبطة توصيلها.

### تمارين إضافية

١٩-١٢ ملفان معامل الربط هما  $k = 0.85$  وعدد لفات الملف الأول 250 لفة. وعندما كان التيار في الملف الأول  $I_1 = 2A$  كان الفيض الكلي  $\Phi_1$  يساوي  $0.3 \text{ mWb}$ . وعند انقاس التيار  $I_1$  عطي إلى الصفر في 2ms كان الجهد التآوري في الملف الثاني يساوي  $63.75V$  ، أوجد  $L_1$  و  $M$  و  $N_2$  والجواب  $37.5 \text{ mH}$ ,  $150 \text{ mH}$ ,  $63.8 \text{ mH}$ ,  $500$

١٣-٢٠ ملفان مترابطان عدد لفاتهما 100 و  $N_2 = 800$  ومعامل الربط هما  $k = 0.85$  ، وعندما كان الملف الأول

مغناطيساً و مر تيار قيمته  $5A$  في الملف الثاني كان الفيض  $\Phi_2$  يساوي  $0.35 \text{ mWb}$  ، أوجد  $L_1$  و  $L_2$  و  $M$

الجواب :  $0.875 \text{ mH}$ ,  $56 \text{ mH}$ ,  $5.95 \text{ mH}$

٢١-١٢ إذا كان الحث المتبادلي\* للمئين متباينين في حالة توصيلهما على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر هو  $0.080 \text{ H}$  ، وفي حالة توصيلهما على التوالي بحيث يعاكس كل منهما الآخر هو  $0.035 \text{ H}$  ، أوجد قيم  $L_1$  و  $L_2$  و  $M$  و  $K$  .

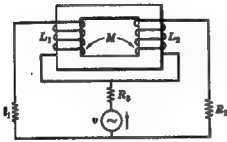
الجواب :  $L_1 = 28.8 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 28.8 \text{ mH}$ ,  $M = 11.25 \text{ mH}$ ,  $0.392$  .

٢٢-١٢ ملفان مترابطان هما  $L_1 = 0.02 \text{ H}$  و  $L_2 = 0.01 \text{ H}$  و  $k = 0.5$  . وصلا بأربع طرق مختلفة ؛ على التوالي ويساعد كل منهما الآخر ؛ على التوالي ويعاكس كل منهما الآخر ؛ على التوازي بالتربتين المحتملين لاجزاء الملف .

أوجد القيم الأربع لـ الحث المتبادلي\* . الجواب :  $15.9 \text{ mH}$ ,  $44.1 \text{ mH}$ ,  $9.47 \text{ mH}$ ,  $3.39 \text{ mH}$  .

٢٣-١٢ ملفان متباينان هما  $L = 0.02 \text{ H}$  و معامل الربط هما  $k = 0.8$  . أوجد  $M$  وتيسى الحث المتبادلي\* عند توصيل الملفين على التوالي ويساعد كل منهما الآخر أو على التوالي ويعاكس كل منهما الآخر . الجواب :  $16 \text{ mH}$ ,  $72 \text{ mH}$ ,  $8 \text{ mH}$  .

٢٤-١٢ ملفان شتبا كسبة 4 إلى 1 ومعامل الربط هما  $k = 0.6$  . وعند توصيل هذين الملفين على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر كان الحث المتبادلي\* لهما هو  $44.4 \text{ mH}$  . أوجد  $L_1$  و  $L_2$  و  $M$  . الجواب :  $6 \text{ mH}$ ,  $24 \text{ mH}$ ,  $7.2 \text{ mH}$  .



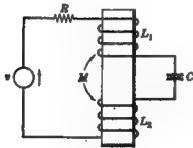
شكل ١٣ - ٣١

٢٥-١٢ ملفان شتبا  $L_1 = 4.5 \text{ mH}$  و  $L_2 = 6.8 \text{ mH}$  .

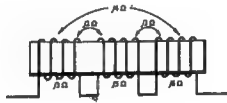
وصلا على التوالي بحيث يساعد كل منهما الآخر ثم وصلا على التوالي بحيث يعاكس كل منهما الآخر . فإذا كان الحث المتبادلي\* في الحالتين هو  $3 \text{ mH}$  و  $19.6 \text{ mH}$  على الترتيب أوجد  $M$  و  $k$  . الجواب :  $4.15 \text{ mH}$ ,  $0.75$  .

٢٦-١٢ اختر تيارات التوجيه للدارة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٣١ ثم اكتب المعادلات في الصيغة المظنية . أوجد الدائرة المكافئة في الترميز النقطي ثم اكتب معادلتها وقارن بين النتيجة .

٢٧-١٢ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفات المترابطة والموضحة في الشكل ١٣-٣٢ . ثم أوجد المساهمة الحثية المكافئة لهما . الجواب :  $12 \Omega$  .



شكل ١٣ - ٣٢

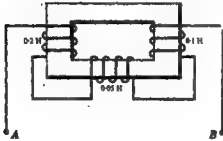


شكل ١٣ - ٣٣

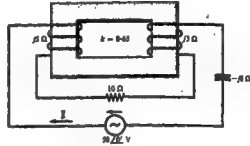
٢٨-١٢ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز النقطي للملفين المترابطين الموضعين في الشكل ١٣-٣٣ واكتب المعادلة في الصيغة المظنية .

٢٩-١٢ ارسم الدائرة المكافئة بالترميز المنطقي للمغنين المتراپلین الموضعی فی الشكل ٢٤-١٣ ثم أوجد التيار  $I$ .

الجواب :  $4.47 \angle 26.7^\circ \text{ A}$



شكل ١٣ - ٢٥



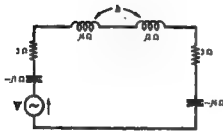
شكل ١٣ - ٢٤

٢٥-١٢ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز المنطقي للمغنين المتراپلین الموضعی فی الشكل ٢٥-١٣ ، ثم أوجد الحث المكافئ لحما عند الطرفين  $AB$ . اعتبر جميع معاملات الربط تساوى 0.5 . الجواب :  $0.239 \text{ H}$

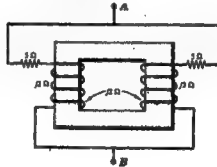
٢٦-١٢ أوجد الدائرة المكافئة بالترميز المنطقي لدائرة المتراپلة الموضعی فی الشكل ٢٦-١٣ ، ثم أوجد المعاوقة المكافئة بين الطرفين  $AB$ . الجواب :  $2.54 + j2.26 \Omega$

٢٧-١٢ فی الدائرة المتراپلة الموضعی فی الشكل ٢٧-١٣ أوجد المعاوقة المكافئة بعد عكس اتجاه لف ملف واحد .

الجواب :  $2.53 + j0.238 \Omega$



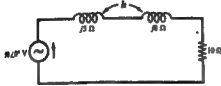
شكل ١٣ - ٢٧



شكل ١٣ - ٢٩

٣٣-١٢ أوجد قيمة  $k$  لدائرة المتصلة حل التوالى والموضعی فی الشكل ٣٧-١٣ ، ثم ضع النقط حل المغنين المتراپلین بحيث تكون الدائرة فی حالة رنين حل التوالى . الجواب :  $k = 0.177$

٣٤-١٢ أوجد قيمة  $k$  لدائرة التوالى الموضعی فی الشكل ٣٨-١٣ ، ثم ضع النقط بحيث تكون الدائرة فی حالة رنين حل التوالى . الجواب :  $k = 0.112$



شكل ١٣ - ٣٩



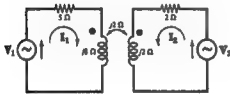
شكل ١٣ - ٣٨

١٣-٣٥ أوجد قيمة  $k$  للدائرة الموضحة في الشكل ١٣-٣٩. ثم ضع النقط بحيث تكون القدرة الخارجة من المصدر  $50 \angle 0^\circ \text{ V}$  هي  $168 \text{ W}$  . الجواب :  $k = 0.475$

١٣-٣٩ في المسألة ١٣-٣٥ أوجد القدرة الخارجة من المصدر وذلك عند عكس النقط . استعمل قيمة  $k$  الموجودة في المسألة ١٣-٣٥ . الجواب :  $54.2 \text{ W}$

١٣-٣٧ أوجد نسبة الجهد  $V_3/V_1$  للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٠ بحيث يكون التيار الناتج  $I_1$  يساوي صفراً . كرر نفس الشيء بحيث يكون التيار  $I_2$  يساوي صفراً .

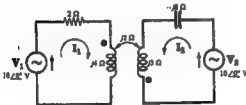
الجواب  $1.414 \angle -45^\circ, 0.212 \angle 32^\circ$



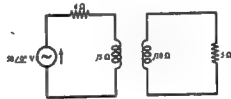
شكل ١٣ - ٤٠

١٣-٣٨ في المسألة ١٣-٣٧ أوجد الجهد الذي يظهر على المصالة  $I_2 = 0$  و  $V_2 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$  . الجواب :  $100 \angle 0^\circ \text{ V}$  ( + عند النقطة )

١٣-٣٩ في الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤١ أوجد المصالة الحثية المتبادلية  $M$  إذا كانت القدرة في المقاومة  $5 \Omega$  هي  $45.2 \text{ W}$  . الجواب :  $34 \mu\text{H}$



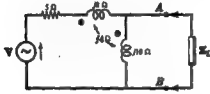
شكل ١٣ - ٤٢



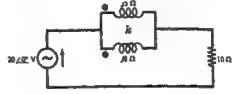
شكل ١٣ - ٤١

١٣-٤٠ في الدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٢ أوجد مركبي التيار  $I_1$  و  $I_2$  الناتجين عن المصدرين  $V_1$  و  $V_2$  . الجواب :  $0.77 \angle 112.5^\circ \text{ A}, 1.72 \angle 36^\circ \text{ A}$

١٣-٤١ عين قيمة  $k$  للدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٢ علماً بأن القدرة في المقاومة  $10 \Omega$  هي  $32 \text{ W}$  . الجواب :  $0.791$



شكل ١٣ - ٤٤

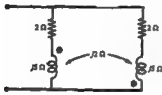


شكل ١٣ - ٤٥

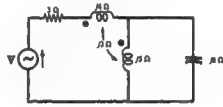
١٣-٤٤ : دائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣ - ٤٤ ، أوجد معاوقة الحمل  $Z_L$  التي ينتج عنها انتقال أكبر قدرة عند الطرفين  $AB$  .  
الجواب :  $1.4 - j2.74 \Omega$

١٣-٤٥ : دائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٥ ، أوجد المعاوقة المتداخلة عند طرفي المصدر .  
الجواب :  $3 + j36.3 \Omega$

١٣-٤٤ : في الدائرة الموضحة في الشكل ١٣-٤٥ ، أوجد الجهد على المقاومة  $5 \Omega$  علما بأن  $V = 50 \angle 45^\circ$  .  
الجواب :  $25.2 \angle 49.74^\circ$  V



شكل ١٣ - ٤٦

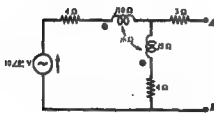


شكل ١٣ - ٤٧

١٣-٤٥ : أوجد المعاوقة المكافئة لدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٦ .  
الجواب :  $1 + j1.5 \Omega$

١٣-٤٦ : أوجد دائرة ثلثين المكافئة لدائرة المترابطة المسماة في الشكل ١٣-٤٧ وذلك عند الطرفين  $AB$  .  
الجواب :  $Z' = 2 + j6.5 \Omega, V' = 5 + j5$  V

١٣-٤٧ : أوجد دائرة نورتن المكافئة لدائرة المترابطة الموضحة في الشكل ١٣-٤٧ وذلك عند الطرفين  $AB$  .  
الجواب :  $Z' = 2 + j6.5 \Omega, I' = 1.04 \angle -27.9^\circ$  A



شكل ١٣ - ٤٨



شكل ١٣ - ٤٩

٤٨-١٣ أوجد دائرة ثلثين المكافئة لدائرة الترابطة الموضحة في الشكل ٤٨-١٣ وذلك عند الطرفين  $AB$ .

الجواب :  $Z' = 8.63 \angle 48.75^\circ \Omega, V' = 484 \angle 34.7^\circ V$

٤٩-١٣ أوجد دائرة نورتن المكافئة للشبكة الكهربائية الترابطة الموضحة في الشكل ٤٨-١٣.

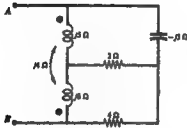
الجواب :

$Z' = 8.63 \angle 48.75^\circ \Omega, I' = 0.560 \angle -83.6^\circ A$

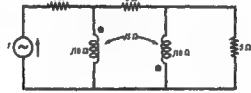
٥٠-١٣ اذائرة الترابطة الموضحة في الشكل ٤٩-١٣ أوجد المقاومة الداخلة عند طرفي مصدر الجهد  $V$

الجواب :

$6.22 + j4.65 \Omega$



شكل ١٣ - ٥٠



شكل ١٣ - ٤٩

٥١-١٣ أوجد المقاومة المكافئة عند الطرفين  $AB$  للشبكة الكهربائية الترابطة الموضحة في الشكل ٥١-١٣.

الجواب :

$7.06 + j3.22 \Omega$

## الفصل الرابع عشر

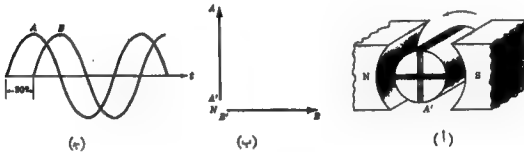
### الأنظمة المتعددة الأطوار

#### مقدمة :

يتكون النظام المتعدد الأطوار الذي يمد الأحبال المتصلة في الأفرع بالقدرة من جهدين متساويين أو أكثر بينها زوايا طور ثابتة . وفي النظام ذي الطورين لدينا جهدين متساويين يختلفان في الطور بزاوية  $90^\circ$  ، بينما في النظام ذي الأطوار الثلاثة تبلغ زاوية فرق الطور  $120^\circ$  . وفي التقويم المتعدد الأطوار تستخدم نظم من ستة أطوار أو أكثر وذلك للحصول على جهد مقوم قليل التموج ، والنظام الشائع الاستخدام في توليد وإرسال القدرة الكهربائية هو النظام ذو الأطوار الثلاثة .

#### النظام ذو الطورين :

ينتج عن دوران زوج الملفات المتعامدة المبينة في الشكل ١٤ - ١ (أ) في مجال مغناطيسي ثابت ، جهدين تأمريان زاوية فرق الطور بينهما ثابتة وتساوي  $90^\circ$  . وإذا كان عدد القمات في الملفين متساو فإن الجهد المطاوع والجهد الحثلي يكون لهما نفس المقدار كما هو موضح في رسميهما شكل ١٤ - ١ (ب) و (ج) على الترتيب .



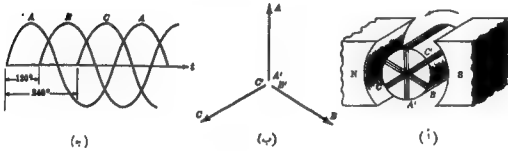
شكل ١٤ - ١ نظام ذو طورين

والشكل البياني للجهد المطاوع شكل ١٤ - ١ (ب) له  $V_{BH} = V_{\cos 0^\circ}$  كمحور إسناد وجهد  $V_{AH} = V_{\cos 90^\circ}$  وإذا وصل طرفا  $A'$  و  $B'$  كدفع  $N$  ، فإن النظام ذا الطورين يتكون من الأفرع الثلاثة  $A$  و  $B$  و  $N$  فرق الجهد بين اللغرين  $A$  و  $B$  يزيد عن جهد الفرع المتبادل بمقدار  $\sqrt{2}$  ويعطى بالمجموع .

$$V_{AB} = V_{AH} + V_{BH} = V_{\cos 90^\circ} + V_{\cos 180^\circ} = \sqrt{2} V_{\cos 135^\circ}$$

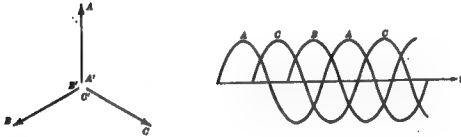
### نظام الأطوار الثلاثة :

الجهود التأثيرية الناتجة في الملفات الثلاثة المتساوية البعد عن بعضها والمبينة في الشكل ١٤ - ٢ (أ) لها فرق طور مقداره  $120^\circ$ . ويصل الجهد في الملف  $A$  إلى نهاية الخطى أولاً ، ثم يليه جهد الملف  $B$  ثم  $C$  وذلك على حسب التتابع  $ABC$  ويتضح من المتابعة من الشكل المظاور وذلك مع اعتبار الاتجاه الموجب للدوران في عكس حركة عقارب الساعة ، وعلى ذلك فإن الجهد المطاوع يمر بنقط ثابتة هي على الترتيب من اليسار  $A-B-C-A-B-C$  ، كما يتضح أيضاً من رسم الجهد اللحظي الموسع في الشكل ١٤ - ٢ (ج) حيث يصل الجهد القمة بنفس الترتيب .



شكل ١٤ - ٢ نظام الأطوار الثلاثة

ينتج من دوران الملفات في الاتجاه العاكس المتتابعة  $CBA$  المبينة في الشكل ١٤ - ٣ .

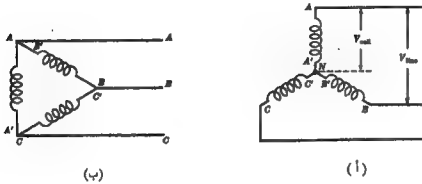


شكل ١٤ - ٣ المتتابعة  $CBA$

وبالرغم من أن نظرية عمل الآلة الموسعة في الشكل ١٤ - ٢ (أ) مسروقة جداً إلا أنه توجد عدة عوامل عملية تمنع استخدامها . والأجهزة العملية المستخدمة حالياً يطور فيها المجال بدلاً من الملفات الثلاثة الطورية ثابتة .

يتوصل إلى نهايات الملفات  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  في الشكل ١٤ - ٢ (أ) تنتج جهود متصلة على شكل نجمة بينما يتوصل إلى  $A$  و  $B$  و  $C$  في الشكل ١٤ - ٢ (ب) تنتج عنه جهود مترددة متصلة على شكل دلتا .



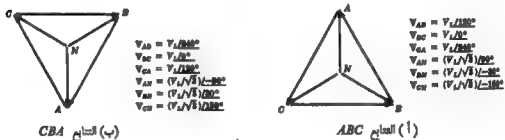


شكل ١٤ - ٤

في توصيلات النجمة يتساوى تيارات الملفات والأفرع والجهد بين فرعين يساوى  $(\sqrt{3} \times \text{جهد الملف})$ . أما في توصيلات دلتا فإله يتساوى جهد الملفات والأفرع ولكن تيارات الملفات تساوى  $(1/\sqrt{3} \times \text{تيار الفرع})$  أنظر المسألة ١٤ - ٢ .  
وفي كلا الاتصاليين فإن الأفرع A و B و C تمثل نظام جهد ذي ثلاثة أطوار . ونقطة التعادل في توصيلات النجمة هي نقطة التوصيل الأربعة للأطوار الثلاثة (نظام أربعة أسلاك) .

#### جهود نظام الأطوار الثلاثة :

باعتبار أحد الجهود كجهد اسناد بزاوية طور تساوى صفر يمكننا تعيين زوايا الطور للجهود الأخرى في هذا النظام . سنأخذ في هذا الفصل  $V_{BC}$  كجهد اسناد وبين المثلثان في الشكلين ١٤ - ٥ (أ) ، (ب) جميع الجهود في التتابعين ABC و CBA على الترتيب .

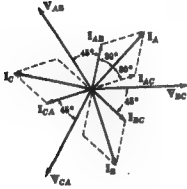


شكل ١٤ - ٥

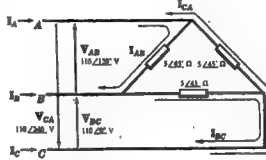
ونظام الجهود ه هو الجهد بين أي زوج من الأفرع A و B أو B و C أو C و A في نظام الأسلاك الأربعة تكون قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل هو  $1/\sqrt{3} \times \text{جهد هذا الفرع}$  . فمثلا في نظام الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك بجهد 208 V يكون النظام CBA جهود أفرع 208 V وجهد الفرع للجهد المتبادل هو  $208/\sqrt{3}$  أو 120 V . وبالإشارة إلى الشكل ١٤ - ٥ (ب) يمكن تعيين زوايا الطور للجهود . وعلى ذلك فإن  $V_{AB} = 208/240^\circ$  ،  $V_{BC} = 208/0^\circ$  ،  $V_{CA} = 208/120^\circ$  ،  $V_{AN} = 120/150^\circ$  ،  $V_{BN} = 120/30^\circ$  ،  $V_{CN} = 120/-90^\circ$  ،  $V_{CA} = 208/120^\circ$  .

## اتزان أحمال نظام الأطوار الثلاثة :

مثال ١ : في نظام الأطوار الثلاثة بثلاثة أسلاك وجهد 110V وصلت المجموعة ABC بثلاث معاوقات متساوية  $5/\sqrt{3} \Omega$  متصلة على شكل دلتا . عين تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  . ثم ادرس الشكل المطاور .



شكل - ١٤



شكل ١٤ - ٦

ارسم الدائرة وتأثير عليها بالجهود كما في الشكل ١٤ - ٦ . يوضح الشكل الاتجاهات الموجبة لتيارات الأفرع والتيارات المطاورة . إذن :

$$\begin{aligned} I_{AB} &= \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{110/\angle 120^\circ}{5/\sqrt{3}} = 22/\angle 75^\circ = 5.7 + j21.2 \text{ A} \\ I_{BC} &= \frac{V_{BC}}{Z} = \frac{110/\angle 0^\circ}{5/\sqrt{3}} = 22/\angle -45^\circ = 15.55 - j15.55 \text{ A} \\ I_{CA} &= \frac{V_{CA}}{Z} = \frac{110/\angle 240^\circ}{5/\sqrt{3}} = 22/\angle 195^\circ = -21.2 - j5.7 \text{ A} \end{aligned}$$

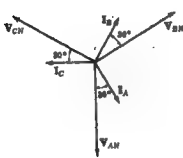
بطبيق قانون كيرشوف التيار عند كل ركن من أركان الأحمال ينتج :

$$\begin{aligned} I_A &= I_{AB} + I_{AC} = 22/\angle 75^\circ - 22/\angle 195^\circ = 22/\angle 45^\circ \text{ A} \\ I_B &= I_{BA} + I_{BC} = -22/\angle 75^\circ + 22/\angle -45^\circ = 22/\angle -90^\circ \text{ A} \\ I_C &= I_{CA} + I_{CB} = 22/\angle 195^\circ - 22/\angle -45^\circ = 22/\angle 135^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

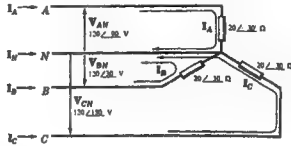
والفرس المطاور الميّن في الشكل ١٤ - ٧ يوضح أن التيارات المترتبة للأفرع هي 38.1A وإن زوايا المطاور بينها هي 120° .

في نظام اتزان الأحمال المتصلة على شكل دلتا يكون جهد الفرع مساوياً لجهد المطاور ويكون تيار الفرع مساوياً  $\sqrt{3}$  تيار المطاور .

**مثال ٢ :** في نظام ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد 208V وصلت المجموعة CBA بجمل متصل على شكل دلتا مساواته  $20\sqrt{3}\angle 30^\circ \Omega$  أوجد تيارات الأفرع . ثم ارسم الشكل المطاور .



شكل ٩-١٤



شكل ٨-١٤

نرسم الدائرة ونطبق جهود الأفرع بالنسبة للجهود المتبادل وذلك باستخدام الشكل ٨-١٤ هـ (ب) . نختار تيارات الأفرع كما في الرسم ٨-١٤ حيث نمود كل التيارات عتول لقطة المتبادل . إذن :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{120/-90^\circ}{20/-30^\circ} = 6.0/-60^\circ \text{ A}$$

$$I_B = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{120/30^\circ}{20/-30^\circ} = 6.0/60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{V_{CN}}{Z} = \frac{120/150^\circ}{20/-30^\circ} = 6.0/180^\circ \text{ A}$$

وبفرس أن الاتجاه الموجب هو اتجاه التيار المتبادل إلى الحمل نحصل على :

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(6.0/-60^\circ + 6.0/60^\circ + 6.0/180^\circ) = 0$$

ويوضح الشكل المطاور ٩-١٤ تيارات الأفرع المترفة ولديه نجد أن كل تيار سابق للجهود الفرع المناظر بالنسبة للجهود المتبادل بزاوية المعاوة .

وفي نظام التران الأحمال المتصلة على شكل النجمة تتساوى تيارات الأفرع والتيارات المطاورة والتيار المتبادل يساوى صفراً ، وجهد الفرع هو  $\sqrt{3}$  الجهد المطاور ، أي أن :  $V_L = \sqrt{3} V_P$

### الدائرة ذات الفرع الواحد المكافئة للأحمال المترفة :

باستخدام تحويلات Y-Δ الموضحة في الفصل الثاني عشر نجد أن مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية  $Z_\Delta$  متصلة على شكل دلتا تكافئ مجموعة من ثلاث معاوقات متساوية  $Z_Y$  متصلة على شكل النجمة ، حيث  $Z_Y = (1/3)Z_\Delta$  . وعلى ذلك فإنه يمكن إجراء مزيد من الحسابات المباعدة على دائرة النجمة لنظام الأحمال المترفة ذي الثلاثة أطوار بنوعية .

إن الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد هي دائرة بطور واحد الدائرة ذات الأطوار الثلاثة وأربعة أسلاك متصلة على شكل نجمة والموضحة في الشكل ١٠-١٤ ، فإما إذا أن الجهد المستخدم له قيمة جهد الفرع بالنسبة للجهود المتبادل وزاوية طور تساوى

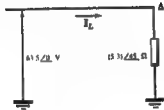
صفاً . وتيار الفرع المحسوب لهذه الدائرة له زاوية طور بالنسبة لزاوية طور الجهد المساوية للصفر . وعلى ذلك فإن تيارات الأفرع الفعلية  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  تكون إما سابقة أو لاحقة لجهود الأفرع المناظرة لها بالنسبة للجهد المتبادل بنفس زاوية الطور .



شكل ١٤ - ١٠ الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد

**مثال ٣ :** احسب تيارات الأفرع في المثال ١ ، باستخدام طريقة الدائرة المكافئة ذات الفرع الواحد .

إرسم الدائرة ذات الفرع الواحد وارمز بالرمز  $\Delta$  عند الحمل لتبين أن المعاوقات الفعلية كانت متصلة على شكل دلتا . المعاوقة المكافئة للمجموعة المتصلة على شكل النجمة هي .



شكل ١٤ - ١١

$$Z_Y = Z_{\Delta}/3 = (6/8)/45^{\circ} \Omega$$

وجهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل هو

$$V_{LN} = V_L/\sqrt{3} = 110/\sqrt{3} = 63.5 \text{ V}$$

إذن تيار الفرع هو .

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{63.5/0^{\circ}}{(6/8)/45^{\circ}} = 38.1/-45^{\circ} \text{ A}$$

بما أن التيار لآخر الجهد بزاوية  $45^{\circ}$  ، فإن تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  تكون لاحقة للجهد المناظرة لها  $V_{AN}$  و  $V_{BN}$  و  $V_{CN}$  بزاوية  $45^{\circ}$  . وقد حصلنا على الزوايا في هذه الجهود من المثلث  $ABC$  في الشكل ١٤ - ١٠ (أ) . ونبدأ بـ جهود الأفرع بالنسبة للجهد المتبادل وتيارات الأفرع المناظرة لها .

$$\begin{aligned} V_{AN} &= 63.5/0^{\circ} \text{ V} & I_A &= 38.1/90^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/45^{\circ} \text{ A} \\ V_{BN} &= 63.5/-30^{\circ} \text{ V} & I_B &= 38.1/-90^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/-135^{\circ} \text{ A} \\ V_{CN} &= 63.5/-150^{\circ} \text{ V} & I_C &= 38.1/-150^{\circ} - 45^{\circ} = 38.1/-195^{\circ} \text{ A} \end{aligned}$$

وهذه التيارات مطابقة لتلك التي حصلنا عليها في المثال ١ . إذا كان المطلوب حساب التيارات المتبادرة في المعاوقات المتصلة على شكل دلتا فإنه يمكن إيجادها من العلاقة  $I_p = I_L/\sqrt{3} = 38.1/\sqrt{3} = 22 \text{ A}$  . ويمكن الحصول على زوايا الطور لهذه التيارات أولاً بوضع زوايا الطور لجهود الأفرع بالنسبة لبعضها ثم تعيين التيارات اللاحقة لها بزاوية  $45^{\circ}$  . أي أن

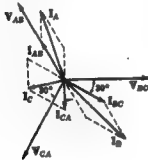
$$\begin{aligned} V_{AB} &= 110 \angle 190^\circ \text{ V} & I_{AB} &= 22 \angle 190^\circ - 45^\circ = 22 \angle 75^\circ \text{ A} \\ V_{BC} &= 110 \angle 0^\circ \text{ V} & I_{BC} &= 22 \angle 0^\circ - 45^\circ = 22 \angle -45^\circ \text{ A} \\ V_{CA} &= 110 \angle 240^\circ \text{ V} & I_{CA} &= 22 \angle 240^\circ - 45^\circ = 22 \angle 195^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

#### الأحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا :

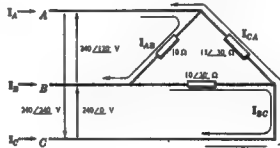
يتكون حل مجموعة الأحمال غير المتزنة المتصلة على شكل دلتا من حساب زوايا الطور للتيارات ثم تطبيق قانون كيرشوف التيار على نقط الاتصال للحصول على تيارات الأفرع الثلاثة . وتيارات الأفرع في هذه الحالة ليست متساوية وليس لها زاوية اختلاف طور  $120^\circ$  يمكن الحالة التي فيها أحمال متزنة .

مثال ٤ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد  $240 \text{ V}$  . فلذا وصلنا المجموعة  $ABC$  بأحمال على شكل دلتا بحيث .  
 $Z_{CA} = 15 \angle -30^\circ \Omega$  ،  $Z_{BC} = 10 \angle 30^\circ \Omega$  ،  $Z_{AB} = 10 \angle 0^\circ \Omega$   
 نأوجد تيارات الأفرع الثلاثة .  
 رسم الشكل المتناظر .



شكل ١٤ - ١٣



شكل ١٤ - ١٢

نصمم الدائرة الموضحة في الشكل ١٢ - ١٤ . نؤثر عليها بالجهود المتناظرة . وعلى ذلك فإن التيارات المتناظرة الموضحة في الرسم مستقلة وتسمى بالملفات :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{240 \angle 120^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 24 \angle 120^\circ \text{ A}, I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} = 24 \angle -30^\circ \text{ A}, I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} = 16 \angle 270^\circ \text{ A}$$

نطبق قانون كيرشوف التيار عند نقط اتصال الأحمال فينتج :

$$\begin{aligned} I_A &= I_{AB} + I_{AC} = 24 \angle 120^\circ - 16 \angle 270^\circ = 28.7 \angle 108.1^\circ \text{ A} \\ I_B &= I_{BA} + I_{BC} = -24 \angle 120^\circ + 24 \angle -30^\circ = 46.4 \angle -45^\circ \text{ A} \\ I_C &= I_{CA} + I_{CB} = 16 \angle 270^\circ - 24 \angle -30^\circ = 21.8 \angle 190.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

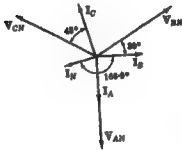
يوضح الشكل ١٣ - ١٤ الرسم المتناظر المتناظر .

### الأحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، أربعة أسلاك :

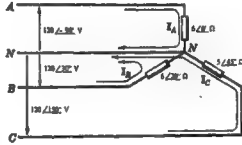
في نظام الأسلاك الأربعة عندما تكون الأحمال غير متزنة فإنه يمر تيار بنقطة التعادل ويظل الجهد عبر كل معاوقة حمل ثابتاً بنفس قيمة جهد القرح بالنسبة لجهد التعادل . وتيارات الأفرع غير متساوية وليس لها زاوية طور  $120^\circ$

#### مثال ٥ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بأربعة أسلاك وجهد  $208 \text{ V}$  . وصلت فيه المجموعة  $CBA$  بأحمال على شكل النجمة بحيث  $Z_A = 6 \angle 0^\circ \Omega$  و  $Z_B = 6 \angle 30^\circ \Omega$  و  $Z_C = 5 \angle 45^\circ \Omega$  أوجد تيارات الأفرع الثلاثة وتيار نقطة التعادل ، ارسم الشكل المطاور .



شكل ١٤ - ١٥



شكل ١٤ - ١٤

نسم الدائرة كما هو موضح في الشكل ١٤ - ١٤ ، ولأثر عليها بالجهود المطاوعة ونختار تيارات الأفرع كما هو موضح . ولكون التيارات مستقلة وتسمى بالمعادلات :

$$I_A = \frac{V_{AN}}{Z_A} = \frac{120 \angle 90^\circ}{6 \angle 0^\circ} = 20 \angle 90^\circ \text{ A}, I_B = \frac{V_{BN}}{Z_B} = 20 \angle 0^\circ \text{ A}, I_C = \frac{V_{CN}}{Z_C} = 24 \angle 105^\circ \text{ A}$$

والتيار المار بنقطة التعادل هو مجموع تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  . وبفرض أن الاتجاه الموجب للتيار  $I_N$  هو في اتجاه الحمل فإن

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(20 \angle 90^\circ + 20 \angle 0^\circ + 24 \angle 105^\circ) = 14.1 \angle 166.9^\circ \text{ A}$$

ويعرض الشكل ١٤ - ١٥ الرسم المطاور للمظاهر .

### الأحمال غير المتزنة على شكل نجمة ، ثلاث أسلاك :

عند اتصال ثلاثة أفرع قط  $A$  و  $B$  و  $C$  بأحمال غير متزنة متصلة على شكل نجمة فإن جهد النقطة المشتركة بين معاوقات الأحمال الثلاثة لا يساوي الجهد المتعادل ويرمز لها بالرمز  $O$  بدلاً من  $N$  . ويعتبر الجهد عبر المعاوقات تغيراً كبيراً من قيمة جهد القرح إلى قيمة الجهد المتعادل ، كما هو موضح في مثلث الجهد الذي يربط جميع الجهود في الدائرة . وإزاحة  $O$  عن  $V$  والمعروفة بإزاحة الجهد المتعادل ، لها أهمية خاصة .

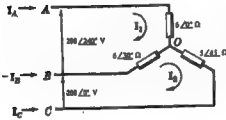
مثال ٦ :

نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك وجهد  $208\text{V}$  وصلت فيه المجموعة  $CBA$  بمقاومات على شكل نجمة بحيث  
 $Z_A = 6\angle 0^\circ \Omega$  و  $Z_B = 6\angle 30^\circ \Omega$  و  $Z_C = 5\angle 45^\circ \Omega$  . أوجد تيارات الأفرع

والجهود المطورة عبر كل مقاومة : ادرس مثلث الجهد وأوجد إزاحة الجهد المتبادل  $V_{ON}$

نرسم الدائرة ونختار تيارى الشبكة  $I_1$  و  $I_2$

كما هو موضح فى الشكل ١٤ - ١٦ . نكتب المعادلات  
 المصفوية لتيارات  $I_1$  و  $I_2$  كما يلى :

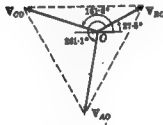


شكل ١٤ - ١٦

$$\begin{bmatrix} 6\angle 0^\circ + 6\angle 30^\circ & -6\angle 30^\circ \\ -6\angle 30^\circ & 6\angle 30^\circ + 5\angle 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208\angle 240^\circ \\ 208\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

ونجدها أن  $I_1 = 23.3\angle 261.1^\circ \text{ A}$  و  $I_2 = 26.5\angle 63.4^\circ \text{ A}$

إذن تكون تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  بالاتجاهات  
 الموضحة هى



شكل ١٤ - ١٧

$$I_A = I_1 = 23.3\angle 261.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 26.5\angle 63.4^\circ - 23.3\angle 261.1^\circ = 15.45\angle -2.5^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 26.5\angle 116.6^\circ \text{ A}$$

والآن نحسب الجهود عبر المقاومات الثلاثة بحساب  
 ضرب التيارات الفعلية فى المقاومات المناظرة .

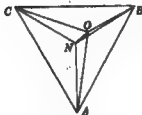
$$V_{AO} = I_A Z_A = 23.3\angle 261.1^\circ (6\angle 0^\circ) = 139.8\angle 261.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 15.45\angle -2.5^\circ (6\angle 30^\circ) = 92.7\angle 27.5^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 26.5\angle 116.6^\circ (5\angle 45^\circ) = 132.5\angle 161.6^\circ \text{ V}$$

ويكون الشكل المطاور هذه الجهود الثلاثة الموضحة

فى الشكل ١٧ - ١٨ مطلقاً متساوى الأضلاع . فى الشكل  
 ١٨ - ١٩ أميد رسم هذا المثلث وأضيفت إليه نقطة التبادل  
 وذلك لتوضيح إزاحة الجهد المتبادل  $V_{ON}$  . ويمكن حساب  
 هذا الجهد باستخدام أى نقطة من النقاط الثلاثة  $A$  أو  $B$  أو  $C$   
 ثم اتباعها بالدليل المناسب لتكون ترميزاً زوجياً للدليل ،  
 وباستخدام النقطة  $A$  نحصل على



شكل ١٨ - ١٩

$$V_{ON} = V_{OA} + V_{AN} = -139.8\angle 261.1^\circ + 120\angle 90^\circ = 28.1\angle 39.8^\circ \text{ V}$$

### طريقة إزاحة نقطة التعادل لأحمال في مقزنة على شكل نجمة ، ثلاثة أسلاك

حسبنا في المثال ٦ حل إزاحة الجهد التعادل  $V_{ON}$  بدلالة جهود الأحمال . أما إذا عطينا حالة جهد  $V_{ON}$  مستقلة عن جهود الأحمال فإن التيارات والجهود المطلوبة في المثال ٦ يمكن الحصول عليها مباشرة كما هو موضح في المثال ٧ .  
محصول حل إزاحة الجهد التعادل نكتب تيارات الأفرع بدلالة جهود الأحمال وساعتها .

$$(١) \quad I_A = V_{AO} Y_A, I_B = V_{BO} Y_B, I_C = V_{CO} Y_C$$

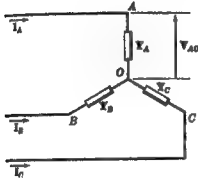
والآن بتطبيق قانون كيرشوف التيار عند النقطة  $O$  في الشكل ١٤ - ١٩ نجد

$$(٢) \quad I_A + I_B + I_C = 0$$

أو

$$(٣) \quad V_{AO} Y_A + V_{BO} Y_B + V_{CO} Y_C = 0$$

وبالإشارة إلى الشكل ١٤ - ١٨ والتعبير عن الجهود  $V_{CO}$  و  $V_{BO}$  و  $V_{AO}$  بدلالة مركبتين كل منهما ، أي أن



شكل ١٤ - ١٩

$$(٤) \quad V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} \quad V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} \quad V_{CO} = V_{CN} + V_{NO}$$

وبالتعويض بالمعادلة (٤) في المعادلة (٣) نحصل على

$$(٥) \quad (V_{AN} + V_{NO}) Y_A + (V_{BN} + V_{NO}) Y_B + (V_{CN} + V_{NO}) Y_C = 0$$

وبما نجد أن

$$(٦) \quad V_{ON} = \frac{V_{AN} Y_A + V_{BN} Y_B + V_{CN} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

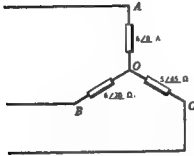
وقد حصلنا على الجهود  $V_{AN}$  و  $V_{BN}$  و  $V_{CN}$  في المعادلة (٦) من مثلث الشكل ١٤ - ٥ واستخدام المتطابقة المطابقة في المسألة . والمساعات  $Y_A$  و  $Y_B$  و  $Y_C$  هي مقبوبات مساوقات الأحمال  $Z_A$  و  $Z_B$  و  $Z_C$  . وبما أن كل الحدود في المعادلة (٦) إما أنها مسطرة أو يمكن الحصول عليها مباشرة لأن إزاحة الجهد التعادل يمكن حسابها ثم استخدامها في تعيين تيارات الأفرع .

### مطل ٧ :

أوجد تيارات الأفرع والجهود على الأحمال في المثال ٦ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التعادل .

بالإشارة إلى الشكل ١٤ - ٢٠ تكون معادلة إزاحة جهد التعادل هي :





شكل ١٤ - ٢٠

$$V_{ON} = \frac{V_{AN}V_A + V_{BN}V_B + V_{CN}V_C}{V_A + V_B + V_C}$$

حيث

$$Y_A = 1/(6 \angle 0^\circ) = 0.1667 \angle 0^\circ \Rightarrow 0.1667 \text{ S}$$

$$Y_B = 1/(6 \angle 30^\circ) = 0.1667 \angle -30^\circ = 0.1443 \dots \angle -0.0833 \text{ S}$$

$$Y_C = 1/(5 \angle 45^\circ) = 0.20 \angle -45^\circ = 0.1414 \dots \angle -0.1414 \text{ S}$$

$$Y_A + Y_B + Y_C = 0.4524 \dots \angle -0.2247 \text{ S}$$

$$\Rightarrow 0.504 \angle -26.5^\circ \text{ S}$$

$$V_{AN}V_A = 120 \angle 90^\circ (0.1667 \angle 0^\circ) = 20 \angle 90^\circ = -j20 \text{ A}$$

$$V_{BN}V_B = 120 \angle 30^\circ (0.1667 \angle -30^\circ) = 20 \angle 0^\circ = 20 \text{ A}$$

$$V_{CN}V_C = 120 \angle 150^\circ (0.20 \angle -45^\circ) = 24 \angle 105^\circ = -6.2 + j23.2 \text{ A}$$

$$V_{AN}V_A + V_{BN}V_B + V_{CN}V_C = 13.8 + j3.2 = 14.1 \angle 13.1^\circ \text{ A}$$

إذن

$$V_{ON} = 14.1 \angle 13.1^\circ / 0.504 \angle -26.5^\circ = 28.0 \angle 39.6^\circ \text{ V}$$

ونحصل على الجهود  $V_{AO}$  و  $V_{BO}$  و  $V_{CO}$  باستخدام  $V_{NO}$  وجهد الفرع المقابل بالنسبة للجهود المتناوبة

$$V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} = 120 \angle 90^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 139.5 \angle 261.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = V_{BN} + V_{NO} = 120 \angle 30^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 92.5 \angle 27.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = V_{CN} + V_{NO} = 120 \angle 150^\circ - 28.0 \angle 39.6^\circ = 132.5 \angle 161.45^\circ \text{ V}$$

ونحصل على تيارات الأفرع مباشرة من الجهود ومساحات الأسلاك المتناظرة لها .

$$I_A = V_{AO}Y_A = 139.5 \angle 261.1^\circ (0.1667 \angle 0^\circ) = 23.2 \angle 261.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = V_{BO}Y_B = 92.5 \angle 27.1^\circ (0.1667 \angle -30^\circ) = 15.4 \angle 2.9^\circ \text{ A}$$

$$I_C = V_{CO}Y_C = 132.5 \angle 161.45^\circ (0.20 \angle -45^\circ) = 26.5 \angle 116.45^\circ \text{ A}$$

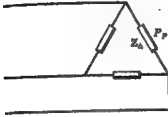
التيارات والجهود السابقة مطابقة تماماً لنتائج المثال ٦ .

### قدرة أحبال متزنة ذات ثلاثة أطوار :

بما أن الماووقات المطاورة المتزنة المتصلة على شكل نجمة أو دلتا يمر بها تيارات متساوية فإن القدرة المطاورة تكون ثلث القدرة الكلية . في الشكل ٢١ - ١ (أ) نجد أن الجهد على الماوقة ZA هو جهد الفرع وأن التيار تيار متناور . والزوايا بين الجهد والتيار هي زوايا الماوقة . إذن القدرة المطاورة هي

$$(٧) \quad P_p = V_L I_p \cos \theta$$

والقدرة الكلية هي



$$(٨) \quad P_T = 3 V_L I_p \cos \theta$$

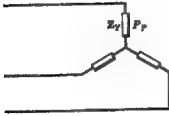
بما أن  $I_L = \sqrt{3} I_p$  إذن قدرة الأحمال المترتبة المتصلة

على شكل دلتا هي

(٩)

$$(٩) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

يمر في مسارات الشكل ١٤ - ٢١ (ب) المتصلة على شكل نجمة ،  
تيارات الأفرع والجهد على  $Z_Y$  هو جهد مطاوع . والزاوية بين هذا  
الجهد والتيار هي زاوية المطاوعة . إذن القدرة المطاوعة هي



$$(١٠) \quad P_p = V_p I_L \cos \theta$$

والقدرة الكلية هي

(ب)

$$(١١) \quad P_T = 3 V_p I_L \cos \theta$$

بما أن  $V_L = \sqrt{3} V_p$  إذن

شكل ١٤ - ٢١

$$(١٢) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

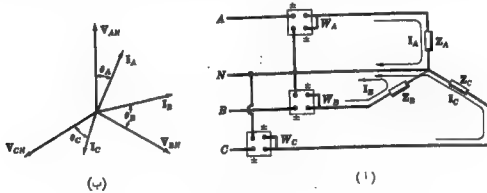
بما أن المادتين (٩) و (١٢) متطابقتان ، فإن القدرة الكلية في نظام الأحمال المترتبة ذا الأطوار الثلاثة تعطى  
بـ  $\sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$  حيث  $\theta$  هي زاوية مطاوعة الحمل أو هي زاوية المطاوعة المكافئة في حالة اتصال العديد من الأحمال  
المترتبة لتكوين نفس النظام .

وبما أن القدرة الظاهرية  $S_T$  - أمبير - فولت - والقدرة الكلية المغناطية  $Q_T$  متعلقان بالقدرة الكلية  $P_T$  ( الفصل  
السابع ) . إذن فإنه في نظام الأحمال المترتبة على الأطوار الثلاثة تعطى القدرة والقدرة المغناطية بالمعادلات :

$$(١٣) \quad P_T = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad S_T = \sqrt{3} V_L I_L \quad Q_T = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta$$

### الواتميتر والإحمال على شكل نجمة ، أربعة أسلاك :

الواتميتر هو جهاز به ملف لقراءة الجهد والتيار وعلى ذلك فإن انحرافه يتناسب مع  $VI \cos \theta$  حيث  $\theta$  هي الزاوية بين الجهد والتيار . ويحتاج نظام الأحمال المتصل على شكل نجمة وأربعة أسلاك لثلاثة واتميتر يوصل كل واحد منهما في فرع من الأفرع الثلاثة كما في الشكل ١٤ - ٢٢ (أ) .



شكل ١٤ - ٢٢

يفترض في الشكل المظاير ١٤ - ٢٢ (ب) أن التيار في الطور A لاحق وتيارا الطورين B و C سابقان وزوايا الأطوار هي  $\theta_A$  و  $\theta_B$  و  $\theta_C$  على الترتيب . إذن قراءات الواتميتر هي

$$(١٤) \quad W_A = V_{AN} I_A \cos \alpha_A^{AN}, \quad W_B = V_{BN} I_B \cos \alpha_B^{BN}, \quad W_C = V_{CN} I_C \cos \alpha_C^{CN}$$

حيث تدرج  $\alpha_A^{AN}$  من الزاوية بين  $V_{AN}$  و  $I_A$  . ويقرأ الواتميتر  $W_A$  القدرة في الطور A بينما يقرأ  $W_B$  و  $W_C$  القدرة في الطورين B و C على الترتيب . والقدرة الكلية هي

$$(١٥) \quad P_T = W_A + W_B + W_C$$

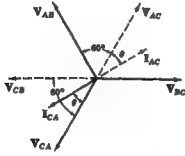
### الطريقة باستخدام اثنين من الواتميتر :

تسلي القدرة الكلية في نظام الأطوار الثلاثة وثلاثة أسلاك بمجموع قرماتي جهازتي الواتميتر المتصلين في أي فرعين مع توصيل على الجهد بسا بالفرع الثالث كما هو موضح في الشكل ١٤ - ٢٣ . وتكون قراءات الأجهزة هي

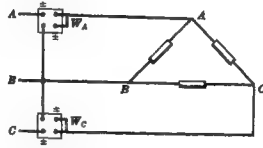
$$(١٦) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \alpha_C^{CB}, \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \alpha_A^{AB}$$

بتطبيق قانون كيرشوف التيار على نقطتي الاتصال A و C في الأحمال المتصلة على شكل دلتا نحصل على

$$(١٧) \quad I_C = I_{CA} + I_{CB} \quad \text{و} \quad I_A = I_{AB} + I_{AC}$$



شكل ١٤ - ٢٤



شكل ١٤ - ٢٣

والمتوسط من  $I_A$  و  $I_C$  من المادة (١٧) في المادة (١٦) نحصل على

$$(18) \quad \begin{aligned} W_A &= V_{AB} I_{AB} \cos \phi_{AB}^{AB} + V_{AB} I_{AC} \cos \phi_{AC}^{AB} \\ W_C &= V_{CB} I_{CA} \cos \phi_{CA}^{CB} + V_{CB} I_{CB} \cos \phi_{CB}^{CB} \end{aligned}$$

وتعبير الحدود  $V_{AB} I_{AB} \cos \phi_{AB}^{AB}$  ،  $V_{CB} I_{CB} \cos \phi_{CB}^{CB}$  مباشرة القدرة في الطورين  $AB$  و  $CB$  نحصل . والحدان الباقيان يحتويان على  $V_{AB} I_{AC}$  ،  $V_{CB} I_{CA}$  ، والذي يمكن كتابتهما الآن  $V_L I_{AC}$  حيث أن كلا من  $V_{AB}$  و  $V_{CB}$  هو جهد فروع و  $I_{AC}$  و  $I_{CA}$  التيار  $I_{AC}$  . وتبين هاتين الحدين لرسم الشكل ١٤ - ٢٤ المطاوع وفيه التيار  $I_{AC}$  لاحق للجهد  $V_{AC}$  بزاوية  $\theta$  .

من الشكل المطاوع نجد أن

$$(19) \quad \phi_{CA}^{CB} = 60^\circ - \theta \quad \phi_{AC}^{AB} = 60^\circ + \theta$$

والآن بإضافة الحدين الباقين في المادة (١٨) والمتوسط (١٨) و  $(60^\circ - \theta)$  و  $(60^\circ + \theta)$  ، بدلاً من  $\phi_{CA}^{CB}$  ،  $\phi_{AC}^{AB}$  على الترتيب نجد أن

$$(20) \quad V_L I_{AC} \cos (60^\circ + \theta) + V_L I_{AC} \cos (60^\circ - \theta)$$

وبما أن  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$  فإن

$$(21) \quad V_L I_{AC} (\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta + \cos 60^\circ \cos \theta + \sin 60^\circ \sin \theta)$$

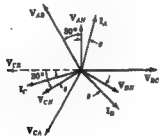
$$(22) \quad V_L I_{AC} \cos \theta$$

أو

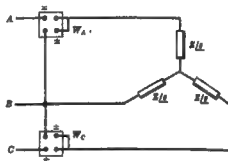
وهي القدرة في الطور الباقي  $AC$  للأحمال . ونرى من هذا أن جهازين من الوالتير يمكن أن يعبرا عن القدرة الكلية في الأحمال المتصلة على شكل دلتا . تترك طريقة استخدام جهازين من الوالتير في حالة أحمال متصلة على شكل نجمة كنسرين للقارىء.

### تطبيق طريقة الثين من الواتميتر على أحمال متزنة :

لتوضيح تطبيق طريقة اثنين من الواتميتر على أحمال متزنة ، نعتبر الثلاثة معاوقات المتساوية المتصلة على شكل النجمة والمرفوعة في الشكل ١٤ - ٢٥ (أ) يوضح الشكل ١٤ - ٢٥ (ب) الشكل المألوف للنتائج  $ABC$  بفرض أن التيار لاحق بزاوية طور مقدارها  $\theta$ .



(ب)



(أ)

شكل ١٤ - ٢٥

والآن بتوصيل الجهازين في القريتين  $A$  و  $C$  فإن قراءتهما

$$(٢٣) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos \phi_{CB}^C \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \phi_{AB}^A$$

من الشكل المألوف نجد أن

$$(٢٤) \quad \phi_{CB}^C = 30^\circ - \theta \quad \phi_{AB}^A = 30^\circ + \theta$$

بالتعويض من المعادلة (٢٤) في المعادلة (٢٣) نحصل على

$$(٢٥) \quad W_C = V_{CB} I_C \cos (30^\circ - \theta) \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos (30^\circ + \theta)$$

عند استخدام طريقة جهازين الواتميتر على أحمال متزنة فإن قراءات الجهازين هما  $V_L I_L \cos (30^\circ + \theta)$  و  $V_L I_L \cos (30^\circ - \theta)$ .

وحيث  $\theta$  هي زاوية المعاوقة ، ويمكن استخدام القرائتين للحصول على الزاوية  $\theta$ .

بكتابة معادلة  $W_1$  واستخدام جيب تمام مجموع زاويتين نحصل على

$$(٢٦) \quad W_1 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta)$$

$$(٢٧) \quad W_2 = V_L I_L (\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta)$$

وبالتل

ومجموعهما هو  $W_1 + W_2 = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$  والفرق بينهما هو  $W_2 - W_1 = V_L I_L \sin \theta$  وبذلك نجد أن

$$(٢٨) \quad \tan \theta = \sqrt{3} \left( \frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} \right)$$

إذن ظل زاوية المعاودة  $Z$  يساوي  $\sqrt{3}$  × النسبة بين الفرق بين قرأتى الجهازين إلى مجموع القراءتين . ويكون معرفة الأفرع التى يوصل فيها الجهازين وكذلك مجموعة المتتابة فإنة لا يمكن التمييز بين  $0 +$  و  $0 -$  . وعلى ذلك فتمت معرفة كل من المتتابة وموضعى الجهازين فإنه يمكن تهيئة الإشارة بالملاطين التاليين . فتجد المتتابة  $ABC$  :

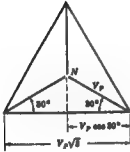
$$(١٩) \quad \tan \theta = \sqrt{8} \frac{W_A - W_B}{W_A + W_B} = \sqrt{8} \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{8} \frac{W_C - W_A}{W_C + W_A}$$

المتتابة  $CBA$

$$(٢٠) \quad \tan \theta = \sqrt{8} \frac{W_B - W_A}{W_B + W_A} = \sqrt{8} \frac{W_C - W_B}{W_C + W_B} = \sqrt{8} \frac{W_A - W_C}{W_A + W_C}$$

### مسائل محلولة

١٤ - ١ بين أن جهد الفرع  $V_L$  في نظام الأطوار الثلاثة يساوي  $\sqrt{3}$  جهد الفرع بالنسبة لجهد المتبادل  $V_P$  .



شكل ١٤ - ٢٦

يمثل المثلث المتساوي الأضلاع الموضح في الشكل ١٤ - ٢٦ جهود الأطوار الثلاثة وفيه يتناسب طول الضلع مع جهد الفرع  $V_L$  ونقطة المتبادل  $N$  في مركز المثلث .

المسقط الأتقى لجهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل هو  $V_P \cos 30^\circ$  أو  $V_P \sqrt{3}/2$  . وحيث أن القاعدة هي مجموع مسطبتين فإنه ينتج أن :

$$V_L = 2(V_P \sqrt{3}/2) = \sqrt{3} V_P$$

١٤ - ٢ احسب تيار أقصى تحميل الملف في كل من النظامين دلتا والنجمة بفرض جهد ذي ثلاثة أطوار بمعدل  $25 \text{ kVA}$  وجهد  $480 \text{ V}$  .

في حالة توصيلات النجمة يكون تيار الفرع وتيار الملف هما نفس القيمة ولنظام الثلاثة أطوار المتوازن يكون

$$I_L = \frac{kVA}{\sqrt{3} V_L \times 10^{-3}} = \frac{25}{\sqrt{3} (480 \times 10^{-3})} = 30.1 \text{ A} \quad \text{و} \quad kVA = \sqrt{3} V_L I_L \times 10^{-3}$$

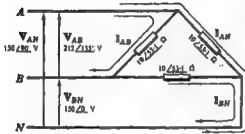
وفي حالة توصيلات - دلتا جهد متوجد له نفس معدل  $kVA$  فإن تيار أقصى تحميل للفرع هو  $30.1 \text{ A}$

$$I_{\text{ملف}} = 30.1/\sqrt{3} = 17.35 \text{ A} \quad \text{إذن} \quad I_L/\sqrt{3} .$$

١٤ - ٣ نظام ذو طورين فيه جهد الفرع بالنسبة لجهد المتبادل  $150 \text{ V}$  ، يؤثر على أحمال مؤلفة متصلة كل شكل دلتا معاودتها متساوية  $10/53.1^\circ \Omega$  . أوجد تيار الفرع والقدرة الكلية .

في حالة نظام ذي طورين فإن جهتي الفرع بالنسبة للجهود المتبادل لها زاوية فرق طور  $90^\circ$ ، إذن إذا كان  $V_{BN}$  هو جهد الإسناد فإن  $V_{AN}$  يصنع زاوية  $90^\circ$  كما في الشكل ١٤-٢٧. وجهد الفرع بالنسبة للفرع الآخر يساوي  $\sqrt{2} \times$  جهد الفرع بالنسبة إلى الجهد المتبادل. إذن  $V_{AB} = \sqrt{2}(150) = 212 \text{ V}$ .

والتيارات المطلوبة هي :



شكل ١٤-٢٧

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{212 \angle 135^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 21.2 \angle 81.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z} = \frac{150 \angle 90^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 15.0 \angle 36.9^\circ \text{ A}$$

$$I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z} = \frac{150 \angle 0^\circ}{10 \angle 53.1^\circ} = 15.0 \angle -53.1^\circ \text{ A}$$

وتعطي تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطلوبة بتطبيق قانون كيرشوف التيار على نقاط اتصال الأحمال في الشكل دلتا. وإذا فرضنا أن الاتجاه الموجب لهذه التيارات هو في الاتجاه إلى الأحمال، إذن

$$I_A = I_{AN} + I_{AB} = 15.0 \angle 36.9^\circ + 21.2 \angle 81.9^\circ = 33.5 \angle 63.4^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_{BN} + I_{BA} = 15.0 \angle -53.1^\circ + 21.2 \angle 81.9^\circ = 33.6 \angle -79.7^\circ \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CN} = 15.0 \angle 36.9^\circ + 15.0 \angle -53.1^\circ = 21.2 \angle 171.86^\circ \text{ A}$$

ونحصل على القدرة الكلية باستخدام القيمة الفعالة لتيار المار في مقاومة الحمل. إذن

$$P_{AB} = I_{AB}^2 R = (21.2)^2 \times 6 = 2700 \text{ W}$$

$$P_{AN} = I_{AN}^2 R = (15.0)^2 \times 6 = 1350 \text{ W}$$

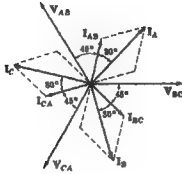
$$P_{BN} = I_{BN}^2 R = (15.0)^2 \times 6 = 1350 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي = 5400 W

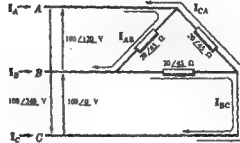
١- نظام ذو ثلاثة أطوار ولثلاثة أسلاك وجهد 100 V يؤثر بالمجموعة ABC على أحمال متزنة متساوية كل شكل دلتا مساوئها  $20 \angle 45^\circ \Omega$ . مின் تيارات الأفرع وأرسم الشكل المطلوب.

تؤثر بمجموعة الأفرع لمتتامة ABC على الدائرة المطاة في الشكل ١٤-٢٨. إذن التيارات المطلوبة هي :

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z} = \frac{100 \angle 120^\circ}{20 \angle 45^\circ} = 5.0 \angle 75^\circ \text{ A}, I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z} = 5.0 \angle 45^\circ \text{ A}, I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z} = 5.0 \angle 195^\circ \text{ A}$$



شكل ١٤ - ٢٩



شكل ١٤ - ٢٨

محصول على تيارات الأفرع كما في شكل الدائرة ، فلنأخذ تطبيق قانون كيرشوف التيار عند كل نقطة اتصال للأحمال . إذن

$$I_A + I_{AB} + I_{AC} = 5.0 \angle 75^\circ - 5.0 \angle 195^\circ = 8.66 \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_B + I_{BA} + I_{BC} = -5.0 \angle 75^\circ + 5.0 \angle 45^\circ = 8.66 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$I_C + I_{CA} + I_{CB} = 5.0 \angle 195^\circ - 5.0 \angle 45^\circ = 8.66 \angle 165^\circ \text{ A}$$

الشكل ١٤ - ٢٩ يوضح الرسم المطاوع لتيارات الأفرع والتيارات المطلوبة .

١٤ - ٥ أوجد ثمرات الواتميتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازي الواتميتر على دائرة المسألة ١٤ - ٤ . ثمرات الواتميتر في حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار وثلاثة أسلاك هي :

$$(١) \quad W_1 = V_L I_L \cos(30^\circ - \theta) \quad \text{و} \quad W_2 = V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)$$

حيث  $\theta$  هي زاوية متعلقة الحمل . لدينا من المسألة ١٤ - ٤ ،  $V_L = 100$  ،  $I_L = 8.66$  ، و زاوية الحمل هي  $45^\circ$  . بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (١) نحصل على

$$W_1 = 100(8.66) \cos(30^\circ + 45^\circ) = 866 \cos 75^\circ = 224 \text{ W}$$

$$W_2 = 100(8.66) \cos(30^\circ - 45^\circ) = 866 \cos(-15^\circ) = 836 \text{ W}$$

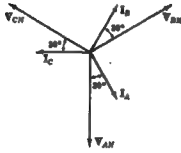
$$P = W_1 + W_2 = 1060 \text{ W} \quad \text{والقدرة الكلية هي}$$

وكاختبار النتيجة فإنه يمكننا حساب القدرة الكلية في أي معاوقات متزنة ذا ثلاثة أطوار من العلاقة :

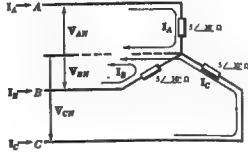
$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 100(8.66) \cos 45^\circ = 1060 \text{ W}$$

١٤ - ٦ وصلت ثلاثة معاوقات متساوية قيمة كل منها  $30 \angle -30^\circ \Omega$  . ومتصلة على شكل نجمة بالمجموعة CBA لثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 150 V . أوجد تيارات الأفرع وارسم الشكل المطاوع .





شكل ٣١ - ١٤



شكل ٣٠ - ١٤

يمكننا في نظام متزن ذي ثلاثة أسلاك على شكل نجمة إضافة نقطة التعادل كما في شكل ٣٠ - ١٤ . إذن بتطبيق جهد الفرع بالنسبة للجهد المتعادل الذي قيمته

$$V_{LN} = V_L / \sqrt{3} = 150 / \sqrt{3} = 86.6 \text{ V}$$

بنفس زاوية طور المتعابلة CBA . والتيارات الأفرع هي :

$$I_A = \frac{V_{LN}}{Z} = \frac{86.6 \angle -90^\circ}{30 \angle 30^\circ} = 17.32 \angle -60^\circ \text{ A}, I_B = \frac{V_{BN}}{Z} = 17.32 \angle 60^\circ \text{ A}, I_C = \frac{V_{CN}}{Z} = 17.32 \angle 180^\circ \text{ A}$$

يوضح الرسم المطاور ٣١ - ١٤ أن مجموعة تيارات الأفرع المترنة سابقة لجهد الأفرع بالنسبة للجهد المتعادل بزاوية  $30^\circ$  ، وهي زاوية مغايرة للحمل .

١٤ - ٧ أوجد قراءات الواقيتر وذلك عند تطبيق طريقة جهازي الواقيتر على دائرة المسألة ١٤ - ٦ .  
في حالة أحمال متزنة ذي ثلاثة أطوار نجد أن

$$W_1 = V_{LN} I_L \cos (30^\circ + \theta) = 150(17.32) \cos (30^\circ + 30^\circ) = 1300 \text{ W}$$

$$W_2 = V_{LN} I_L \cos (30^\circ - \theta) = 150(17.32) \cos (30^\circ - 30^\circ) = 2600 \text{ W}$$

$$P_T = W_1 + W_2 = 3900 \text{ W} \text{ والقدرة الكلية هي}$$

وكاختبار للتنبؤ يمكننا حساب القدرة المطاورة  $P_p = I_L^2 R = (17.32)^2 4.33 = 1300 \text{ W}$  ثم حساب القدرة الكلية

$$P_T = 3P_p = 3(1300) = 3900 \text{ W}$$

أو في حالة أحمال متزنة ذي ثلاثة أطوار فإن القدرة الكلية هي

$$P = \sqrt{3} V_{LN} I_L \cos \theta = \sqrt{3}(150)(17.32) \cos (-30^\circ) = 3900 \text{ W}$$

١٤ - وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $15/30^\circ \Omega$  متصلة على شكل دلتا بمجموعة  $ABC$  لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك - وجهد  $200\text{ V}$  . أوجد تيارات الأفرع باستخدام طريقة دوائر الفرع الواحد المكافئة .

بما أن الحمل متصل على شكل دلتا فإننا نحصل أولاً على المعاوقات المكافئة للحمل والمتصلة على شكل نجمة :

$$Z_Y = Z_\Delta/3 = 15/30^\circ/3 = 5/30^\circ \Omega$$

وقيمة جهد الفرع بالنسبة لجهد التعداد هي

$$V_{LH} = V_L/\sqrt{3} = 200/\sqrt{3} = 115.5\text{ V}$$

والآن لأن الجهد المؤثر على دائرة الفرع الواحد المكافئ، الموضحة في الشكل ١٤ - ٣٢ هو  $115.5/0^\circ\text{ V}$  والتيار الناتج هو

$$I_L = \frac{V_{LH}}{Z_Y} = \frac{115.5/0^\circ}{5/30^\circ} = 23.1/30^\circ\text{ A}$$

شكل ١٤ - ٣٢

وبحصول على تيارات الأفرع  $I_A$  و  $I_B$  و  $I_C$  فإننا نعين أولاً زاوية الطور في جهد الفرع المناظر بالنسبة لجهد المصادر في المتتابة  $ABC$  . وبما أن زاوية طور  $V_{AN}$  هي  $90^\circ$  .

$$I_A = 23.1/90^\circ - 30^\circ = 23.1/60^\circ\text{ A} \quad I_B = 23.1/90^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 23.1/180^\circ\text{ A} \quad I_C = 23.1/90^\circ - 30^\circ + 120^\circ = 23.1/0^\circ\text{ A}$$

وترتبط تيارات المعاوقات المتصلة على شكل دلتا بتيارات الأفرع بالعلاقة  $I_L = \sqrt{3}I_\phi$  . ومنها نجد أن

$$I_\phi = 23.1/\sqrt{3} = 13.3\text{ A}$$

وزاوية طور  $V_{AB}$  في المتتابة  $ABC$  هي  $120^\circ$  ، إذن ،  $I_{AB} = 13.3/120^\circ - 30^\circ = 13.3/90^\circ\text{ A}$  .

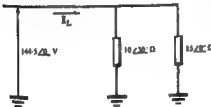
وبنفس الطريقة نجد أن  $I_{BC} = 13.3/120^\circ - 30^\circ = 13.3/90^\circ\text{ A}$  و  $I_{CA} = 13.3/120^\circ - 30^\circ = 13.3/90^\circ\text{ A}$  .

١٤ - ٩ وصلت مجموعتان إحداهما متصلة على شكل نجمة وتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $10/30^\circ \Omega$  ، والثانية متصلة على شكل نجمة أيضاً وتكون من ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $5/0 \Omega$  ، بنظام واحد ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك - وجهد  $250\text{ V}$  . أوجد القدرة الكلية

بما أن كلتا المجموعتين متصلتين على شكل نجمة فإنه يمكن استبدالهما بمقاومتها المطورة مباشرة بدائرة مكافئة ذات فرع واحد كما في الشكل ١٤ - ٣٣ . والجهد المطلوب في دائرة الفرع الواحد المكافئ هو

$$V_{LH} = V_L/\sqrt{3} = 250/\sqrt{3} = 144.5\text{ V}$$

شكل ١٤ - ٣٣



إذن التيار هو

$$I_L = \frac{144 \angle 0}{10 \angle 30} + \frac{144 \angle 0}{15 \angle 0}$$

$$= 14.45 \angle -30 + 9.62 \angle 0 = 23.2 \angle -18.1^\circ \text{ A}$$

في معادلة القدرة  $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$  الزاوية  $\theta$  هي زاوية المقاومة في حالة وجود مجموعة واحدة .

أما في حالة عدة مجموعات متصلة بنفس النظام فإن  $\theta$  هي زاوية معاوقة الحمل المكافئ . في حالة حساب التيار  $I_L$  فإننا اعتبرنا مجموعتي الأحمال ووجدنا أن التيار لاحق للجهد بزاوية  $18.1^\circ$  . وعلى هذا يتضح لنا أن المعاوقة المكافئة حية ولها زاوية  $18.1^\circ$  . إذن

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 250 (23.2) \cos 18.1^\circ = 9530 \text{ W}$$

١٤ - ١٠ إذا أثرنا بالمجموعة  $ABC$  نظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد  $208 \text{ V}$  على ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $12 \angle 30^\circ \Omega$  متصلة على شكل دلتا وعلى ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $5 \angle 45^\circ \Omega$  متصلة على شكل نجمة . فأوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .

حيث أن المجموعة الأولى للأحمال متصلة على شكل دلتا فإننا نحصل عن شكل نجمة المكافئ له كما

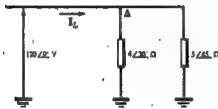
$$Z_Y = Z_{\Delta} / 3 = 12 \angle 30^\circ / 3 = 4 \angle 30^\circ \Omega$$

وحيث أن جهد الفرع هو  $208 \text{ V}$  فإن جهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل هو  $208 / \sqrt{3} \text{ V}$  أو  $120 \text{ V}$  .

يوضح الشكل ١٤ - ٣٤ دائرة الفرع الواحد المكافئ وفيها معاوقتا الحمل هما  $4 \angle 30^\circ \Omega$  ،  $5 \angle 45^\circ \Omega$  ويمكن استبدال هاتين المقاومتين بمقاومة مكافئة هي

$$Z_{eq} = \frac{4 \angle 30^\circ (5 \angle 45^\circ)}{4 \angle 30^\circ + 5 \angle 45^\circ} = 2.24 \angle 36.6^\circ \Omega$$

إذن التيار هو



شكل ١٤ - ٣٤

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0}{2.24 \angle 36.6^\circ} = 53.6 \angle -36.6^\circ \text{ A}$$

والجهد  $V_{AN}$  في المتابعة  $ABC$  له زاوية طور  $90^\circ$  وعلى هذا فإن

$$I_B = 53.6 \angle -66.6^\circ \text{ A} \quad \text{وبالمثل نجد أن} \quad I_A = 53.6 \angle -36.6^\circ \text{ A} \quad I_C = 53.6 \angle 36.6^\circ \text{ A}$$

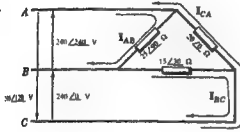
$$I_C = 53.6 \angle -186.6^\circ \text{ A}$$

القدرة الكلية هي

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta = \sqrt{3} 208 (53.6) \cos 36.6^\circ = 15500 \text{ W}$$

١١-١٤ تؤثر المجموعة CBA لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 240 V على أحمال متصلة على شكل دلتا فيها  $Z_{CA} = 20/\underline{0^\circ} \Omega$  ،  $Z_{BC} = 15/\underline{30^\circ} \Omega$  و  $Z_{AB} = 25/\underline{90^\circ} \Omega$  .

تؤثر بمجهود الأفرع لمتتالية CBA على الأحمال المتصلة على شكل دلتا والموضحة في الشكل ١٤-٣٥ ، ونختار التيارات المطارة كما هو موضح في الشكل . إذن



شكل ١٤ - ٣٥

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{240/\underline{240^\circ}}{25/\underline{90^\circ}} = 9.6/\underline{150^\circ} \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{240/\underline{0^\circ}}{15/\underline{30^\circ}} = 16/\underline{-30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{240/\underline{120^\circ}}{20/\underline{0^\circ}} = 12/\underline{120^\circ} \text{ A}$$

والآن نحسب تيارات الأفرع بدلالة التيارات المطارة:

$$I_A = I_{AB} + I_{AC} = 9.6/\underline{150^\circ} - 12/\underline{120^\circ} = 6.06/\underline{247^\circ} \text{ A}$$

$$I_B = I_{BA} + I_{BC} = -9.6/\underline{150^\circ} + 16/\underline{-30^\circ} = 25.6/\underline{-30^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} = 12/\underline{120^\circ} - 16/\underline{-30^\circ} = 27.1/\underline{137.2^\circ} \text{ A}$$

وكما هو متوقع في حالة الأحمال غير المترنة فإن تيارات الأفرع غير متساوية .

ونحسب القدرة في كل طور كما يلي

$$\text{المحاطة} \quad I_{AB} = 9.6 \text{ A} \quad R_{AB} = 0 \quad \text{أي أن} \quad Z_{AB} = 25/\underline{90^\circ} = 0 + j25 \text{ ohms}$$

$$P_{AB} = I_{AB}^2 R_{AB} = (9.6)^2(0) = 0$$

$$\text{المحاطة} \quad I_{BC} = 16 \text{ A} \quad R_{BC} = 13 \Omega \quad \text{أي أن} \quad Z_{BC} = 15/\underline{30^\circ} = 13 + j7.5 \text{ ohms}$$

$$P_{BC} = I_{BC}^2 R_{BC} = (16)^2(13) = 3330 \text{ W}$$

$$\text{المحاطة} \quad I_{CA} = 12 \text{ A} \quad R_{CA} = 20 \Omega \quad \text{أي أن} \quad Z_{CA} = 20/\underline{0^\circ} = 20 + j0 \text{ ohms}$$

$$P_{CA} = I_{CA}^2 R_{CA} = (12)^2(20) = 2880 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي مجموع القدرات المطارة ،

$$P_T = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 0 + 3330 + 2880 = 6210 \text{ W}$$

١١-١٧ أوجد قراءات الواتميتر عند استخدام طريقة جهازى الواتميتر في دائرة المسألة ١٤ - ١١ إذا كان الجهازان متصلين في الفرعين (١)  $A$  و  $B$  ، (ب)  $A$  و  $C$  .

(١) في حالة توصيل الجهازين في الفرعين  $A$  و  $B$  فإن

$$W_B = V_{BC} I_B \cos \phi_{BC}^{AC} \quad (٢) \quad , \quad W_A = V_{AC} I_A \cos \phi_{AC}^{AC} \quad (١)$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١١ ،  $V_{AC} = 240 \angle -60^\circ \text{ V}$  و  $I_A = 6.06 \angle 247.7^\circ \text{ A}$  ، إذن الزاوية

$\phi_{AC}^{AC}$  هي الزاوية بين  $247.7^\circ$  و  $-60^\circ$  أو  $52.3^\circ$  . بالتعويض في (١) نجد أن

$$W_A = 240(6.06) \cos 52.3^\circ = 890 \text{ W}$$

لدينا أيضاً من المسألة ١١-١١ أن  $V_{BC} = 240 \angle 90^\circ \text{ V}$  و  $I_B = 25.6 \angle -30^\circ \text{ A}$  ، إذن  $\phi_{BC}^{AC} = 30^\circ$  .

وبالتعويض في (٢) نجد أن

$$W_B = 240(25.6) \cos 30^\circ = 5320 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي  $P_T = W_A + W_B = 890 + 5320 = 6210 \text{ W}$

(ب) في حالة توصيل الجهازين في الفرعين  $A$  و  $C$  فإن

$$W_C = V_{CB} I_C \cos \phi_{CB}^{CB} \quad (١) \quad , \quad W_A = V_{AB} I_A \cos \phi_{AB}^{AB} \quad (٢)$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١١ أن  $V_{AB} = 240 \angle 240^\circ \text{ V}$  ، وبما أن  $I_A = 6.06 \angle 247.7^\circ \text{ A}$  ، إذن

$\phi_{AB}^{AB} = 7.7^\circ$  . وبالتعويض في (٢) نجد أن

$$W_A = 240(6.06) \cos 7.7^\circ = 1440 \text{ W}$$

وأيضاً  $V_{CB} = 240 \angle 180^\circ \text{ V}$  و  $I_C = 27.1 \angle 132.2^\circ \text{ A}$  ، وبما نجد أن  $\phi_{CB}^{CB} = 42.8^\circ$  .

وبالتعويض في (١) نجد أن

$$W_C = 240(27.1) \cos 42.8^\circ = 4770 \text{ W}$$

والقدرة الكلية هي  $P_T = W_A + W_C = 1440 + 4770 = 6210 \text{ W}$

١٤ - ١٣ ثلاث المجموعات  $CBA$  لنظام ذي ثلاثة أطوار -  
أربعة أسلاك بجهد  $208\text{ V}$  على مجموعة أحمال متصلة

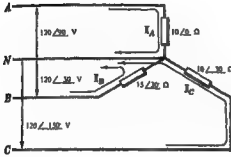
على شكل نجمة فيها  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$

$$Z_B = 15 \angle 30^\circ \text{ ohms}$$

و  $Z_C = 10 \angle -30^\circ \text{ ohms}$  . أوجد تيارات

الأفرع والتيار المتبادل والقوة الكلية .

بالتأثير بجهد الفرع بالنسبة للجهد المتبادل المتناوبة  
 $ABC$  حل القائمة الوضحة في الشكل ١٤ - ٣٩ ،  
وحساب تيارات الأفرع بفرض الاتجاه الموجب هو  
الاتجاه إلى الأحمال ، نجد أن



شكل ٣٩ - ١٤

$$I_A = V_{AN}/Z_A = (120 \angle 90^\circ)/(10 \angle 0^\circ) = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$I_B = V_{BN}/Z_B = (120 \angle 30^\circ)/(15 \angle 30^\circ) = 8 \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$I_C = V_{CN}/Z_C = (120 \angle -30^\circ)/(10 \angle -30^\circ) = 12 \angle -120^\circ \text{ A}$$

تحتوي نقطة المتبادل على مجموع تيارات الأفرع المتناوبة وبفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الأحمال فإن

$$I_N = -(I_A + I_B + I_C) = -(12 \angle 90^\circ + 8 \angle -60^\circ + 12 \angle -120^\circ) = 5.66 \angle 69.4^\circ \text{ A}$$

ويعر في المتداولة  $Z_A = 10 + j0 \text{ ohms}$  التيسر  $I_A = 12 \angle 90^\circ \text{ A}$  . القدرة في حمل هذا الطور هو

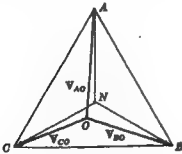
$$P_A = (12)^2(10) = 1440 \text{ W.}$$

والقدرة المتداولة هي  $P_B = (8)^2(13) = 832 \text{ W}$  . وبالمثل فإن  $Z_B = 8.66 - j5 \text{ ohms}$  و  $Z_C = 10 \angle -30^\circ$  عتوى حل

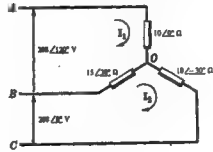
$$P_C = (12)^2(8.66) = 1247 \text{ W}$$

$$P_T = P_A + P_B + P_C = 1440 + 832 + 1247 = 3519 \text{ W}$$

١٤ - ١٤ إذا وصلت معاوقات المسألة ١٤ - ١٣ بالمجموعة  $ABC$  ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد  $208\text{ V}$  . فأوجد تيارات الأفرع والجهد عبر المتداولات .



٣٨ - ١٤



شكل ٣٧ - ١٤

توضع دائرة الشكل ١٤ - ٣٧ جدي الفرعين  $V_{AB}$  و  $V_{BC}$  وبالاختيار الموضح لتيارى الشبكة  $I_1$  و  $I_2$  فإن السعة المصفوية لمادلات تيارى الشبكة هي

$$\begin{bmatrix} 10/0^\circ + 15/30^\circ & -15/30^\circ \\ -15/30^\circ & 15/30^\circ + 10/-30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208/120^\circ \\ 208/0^\circ \end{bmatrix}$$

ومنها نجد أن

$$I_1 = \frac{5210 \angle 90^\circ}{367.5 \angle 39^\circ} = 14.15 \angle 86.1^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{3730 \angle 56.6^\circ}{367.5 \angle 39^\circ} = 10.15 \angle 52.7^\circ \text{ A}$$

وبمثل تيارات الأفرع بدلالة  $I_1$  و  $I_2$  بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الاحمال بالمادلات

$$I_A = I_1 = 14.15 \angle 86.1^\circ \text{ A}$$

$$I_B = I_2 - I_1 = 10.15 \angle 52.7^\circ - 14.15 \angle 86.1^\circ = 8.0 \angle -49.5^\circ \text{ A}$$

$$I_C = -I_2 = 10.15 \angle (52.7^\circ - 180^\circ) = 10.15 \angle -127.3^\circ \text{ A}$$

والآن فإن الجهد على المراكز هو

$$V_{AO} = I_A Z_A = 14.15 \angle 86.1^\circ (10 \angle 0^\circ) = 141.5 \angle 86.1^\circ \text{ V}$$

$$V_{BO} = I_B Z_B = 8.0 \angle -49.5^\circ (15 \angle 30^\circ) = 120 \angle -19.5^\circ \text{ V}$$

$$V_{CO} = I_C Z_C = 10.15 \angle -127.3^\circ (10 \angle -30^\circ) = 101.5 \angle -157.3^\circ \text{ V}$$

عند توصيل نهايات الجهود المطورة الثلاثة  $V_{AO}$  و  $V_{BO}$  و  $V_{CO}$  بخطوط مستقيمة ينتج لدينا مثلث المتناوبة  $ABC$  . إذن النقطة  $N$  يمكن إحالتها إلى الشكل ١٤ - ٣٨ .

١١ - ١٥ كرو حل المسألة ١٤ - ١٤ باستخدام طريقة إزاحة نقطة التبادل .

بحسب الجهد  $V_{ON}$  في طريقة إزاحة نقطة التبادل من العلاقة

$$V_{ON} = \frac{V_{AN} V_A + V_{BN} V_B + V_{CN} V_C}{V_A + V_B + V_C}$$

لدينا من المسألة ١٤ - ١٤  $V_A = 1/10 = 0.1 \text{ S}$  ,  $V_B = 1/(15 \angle 30^\circ) = 0.0577 - j0.033 \text{ S}$

و  $V_C = 1/(10 \angle -30^\circ) = 0.0866 + j0.050 \text{ S}$  . إذن

$$V_A + V_B + V_C = 0.244 + j0.0167 = 0.244 \angle 3.93^\circ \text{ S}$$

$$\begin{aligned} V_{AN}V_A &= 120 \angle 90^\circ (0.1) = 12 \angle 90^\circ = j12 \text{ A} \\ V_{BN}V_B &= 120 \angle -30^\circ (0.0667 \angle -30^\circ) = 8.0 \angle -60^\circ = 4.0 - j6.93 \text{ A} \\ V_{CN}V_C &= 120 \angle -150^\circ (0.1 \angle 30^\circ) = 12 \angle -120^\circ = -6.0 - j10.4 \text{ A} \\ V_{AN}V_A + V_{BN}V_B + V_{CN}V_C &= -2.0 - j5.33 = 5.69 \angle 249.4^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$V_{ON} = (5.69 \angle 249.4^\circ) / (0.244 \angle 3.93^\circ) = 23.3 \angle 245.5^\circ = -9.66 - j21.2$$

ويمكن التعبير عن معادلات الحمل بدلالة جهد الفرع المناظر بالنسبة للجهد المتبادل ، وذلك من إزاحة الجهد المتبادل بمقابل :

$$\begin{aligned} V_{AO} &= V_{AN} + V_{NO} = 120 \angle 90^\circ + (9.66 + j21.2) = 141.2 \angle 86.08^\circ \text{ V} \\ V_{BO} &= V_{BN} + V_{NO} = 120 \angle -30^\circ + (9.66 + j21.2) = 120 \angle -18.9^\circ \text{ V} \\ V_{CO} &= V_{CN} + V_{NO} = 120 \angle -150^\circ + (9.66 + j21.2) = 102 \angle 202.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

وبالحصول على تيارات الأفرع فإننا نأخذ حاصل ضرب هذه الجهود في المساحات المناظرة

$$\begin{aligned} I_A &= V_{AO}V_A = 141.2 \angle 86.08^\circ (0.1 \angle 0^\circ) = 14.12 \angle 86.08^\circ \text{ A} \\ I_B &= V_{BO}V_B = 120 \angle -18.9^\circ (0.0667 \angle -30^\circ) = 8.0 \angle -48.9^\circ \text{ A} \\ I_C &= V_{CO}V_C = 102 \angle 202.4^\circ (0.1 \angle 30^\circ) = 10.2 \angle 232.4^\circ \text{ or } 10.2 \angle -127.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

والنتائج السابقة تطابق المسألة ١٤ - ١٤ وذلك في حدود الدقة التي تسمح بها المسطرة الحاسبة .

١٤ - ١٦ إذا حصلنا على القراءتين 1154 V ، 577 W عند استخدام طريقة جهاز زاتنير في أحمال متزنة . فلنوجد معاوقات الحمل المتصلة على شكل دلتا إذا كان جهد النظام 100 V .  
لدينا في حالة أحمال متزنة بثلاثة أطوار

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \pm \sqrt{3} \frac{1154 - 577}{1154 + 577} = \pm 0.577$$

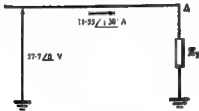
حيث  $\theta = \pm 30^\circ$  . ( لنعلم معرفتنا كل من المتجانسة وموضعي الجهازيين . فإنه لا يمكن تجهيزنا لإشارة ولذلك فإننا نكتب  $\pm$  ) .

القدرة الكلية هي

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

$$I_L = \frac{P}{\sqrt{3} V_L \cos \theta} = \frac{1731}{\sqrt{3}(100)(0.866)} = 11.55 \text{ A}$$

شكل ١٤ - ٢٩





نرسم دائرة الفرع الواحد المكافئة ولوازم عليها بالجدد  
الشكل ١٤-٣٩ . وحل هذا لأن معاوقات الشكل التبعي هي .

$$Z_Y = \frac{V}{I} = \frac{57.7 \angle 0^\circ}{11.55 \angle -30^\circ} = 5.0 \angle 30^\circ \Omega$$

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 15 \angle 30^\circ \Omega$$

١١-١٧ عند تطبيق طريقة جهازى واتيمر على نظام ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك بجهد 100 V ومتتابة ABC كان

قراءات الجهازين متساوية كانا موصلين فى الفرعين B و C هما  $W_B = 836 \text{ W}$  و  $W_C = 224 \text{ W}$  . أوجد  
المعاوقات المتزنة الشكل دلتا .

بما أن كلا من المتتابة وموضعى الجهازين معروف فذلك يمكن تحديد إشارة  $\theta$  . وحل هذا لأن

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{W_B - W_C}{W_B + W_C} = \sqrt{3} \frac{836 - 224}{836 + 224} = 1$$

أو  $\theta = 45^\circ$

بما أن  $P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$  ، إذن فالدائرة المكافئة

ذات الفرع الواحد لها جهد  $57.7 \angle 0^\circ \text{ V}$  ومعاوقات الشكل التبعي هي

$$Z_Y = V/I = (57.7 \angle 0^\circ) / (8.66 \angle 45^\circ) = 6.67 \angle -45^\circ \Omega$$

$$Z_\Delta = 3Z_Y = 20 \angle -45^\circ \Omega$$

١١-١٨ وصلت وحدة تسخين 1500 W ذات ثلاثة أطوار وعامل القدرة لها يساوى الوحدة ومحرك تأثيرى 5hp كفاءة  
أقصى تحمل له 80 % وعامل القدرة له 0.85 . بنظام واحد ذى ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . أوجد  
قيمة تيار الفرع لمدل نظام من المحرك قيمته 5hp .

بما أن  $746 \text{ W} = 1 \text{ hp}$  ، فإن عطاء المحرك  $(5 \text{ hp})(746 \text{ W/hp}) = 3730 \text{ W}$  . إذن القدرة

$$3730 / 0.80 = 4662 \text{ W}$$

والتيار المطلوب هو

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta, 4662 = \sqrt{3} (208 I_L) (0.85), I_L = 15.25 \text{ A}$$

التيار المطلوب فى دائرة الفرع الواحد المكافئة لاسم الجهد بزاوية  $\theta$  حيث  $\cos^{-1} 0.85 = 31.7^\circ$

إذن تيار الفرع المتحرك هو  $I_L = 15.25 \angle -31.7^\circ \text{ A}$  .

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \text{ where } \theta = 0^\circ$$

لدينا الآن حمل التسخين

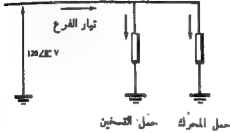
حيث  $\theta = 0^\circ$  وبالتعويض نجد أن

$$1500 = \sqrt{3}(208) I_L I_L = 4.16 A, I_L = 4.16 \angle 0^\circ A$$

والتيار الكلي للفرع هو المجموع المتناظر  
الحرك وحمل التسخين :

$$I_L = 15.25 \angle -31.7^\circ + 4.17 \angle 0^\circ = 18.9 \angle -25.1^\circ A$$

وعلى هذا فإن التيار في كل فرع هو 18.9 A  
مطابق 5 hp من الحركة التناظرية .

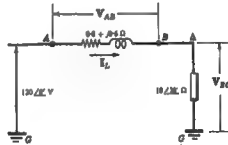


شكل ١٤ - ١٠

١٤ - ١٩ إذا وصلت ثلاث معاوقات متساوية قيمة كل منها  $30 \angle 30^\circ \Omega$  على شكل دلتا بنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V وكلاهما من طريق معاوقات، قيمتها  $0.8 + j0.6 \Omega$  فأوجد قيمة جهد الفرع عند كل حمل .



شكل ١٤ - ١١



شكل ١٤ - ١٢

المائرة موضحة في الشكل ١٤ - ١١، مع شكل نجس ذي معاوقة مكافئة لفرعها  $Z_{\Delta} / 3$  أو  $10 \angle 30^\circ \Omega$  ومعاوقة الفرع متصلة على التوالي مع الحمل، أي أن

$$Z_{eq} = Z_{load} + Z_{line} = 0.8 + j0.6 + 8.66 + j5.0 = 9.46 + j5.6 = 11.0 \angle 30.6^\circ \Omega$$

إذاً

$$I_L = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{11.0 \angle 30.6^\circ} = 10.9 \angle -30.6^\circ A$$

$$V_{BD} = I_L Z_{load} = 10.9 \angle -30.6^\circ (10 \angle 30^\circ) = 109 \angle -0.6^\circ V$$

وجهد الحمل هو

$$V_L = \sqrt{3}(109) = 189 V$$

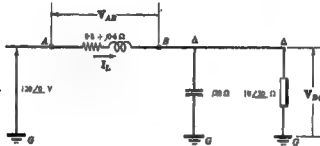
وجهد الفرع المطلوب هو

وعلى ذلك فإن جهد النظام 208 V يجب أن يكون 189 V على الحمل نتيجة لوجود معاوقة في الفرع .

الشكل ١٤ - ٢٢ يوضح الرسم المتناظر وفيه مربوط في جهد الفرع هو

$$V_{AO} = V_{AB} + V_{BO} \quad \text{و} \quad V_{AB} = I_L Z_{eq} = (10.9 \angle -30.6^\circ)(0.8 + j0.6) = 10.9 \angle 6.3^\circ \text{ V}$$

١٤ - ٢٢ أوجد في المسألة ١٤ - ١٩ جهد الفرع عند الحمل وذلك عند توصيل مجموعة من المكثفات بمانعتها  $60 \Omega / f$  على التوازي مع الأحمال .



شكل ١٤ - ٢٢

في دائرة الفرع الواحد المكافئة الموضحة في الشكل ١٤ - ٢٢، يحصل كل من  $20 \Omega / f$  و  $10 \angle 30^\circ \Omega$  على التوازي .

$$Z_p = \frac{10 \angle 30^\circ (-j20)}{(8.66 + j3) - j20} = 11.55 \angle 0^\circ \Omega$$

والمعاوقة  $Z_p$  متصلة على التوالي مع معاوقة الفرع . إذن

$$Z_{eq} = Z_{line} + Z_p = (0.8 + j0.6) + (11.55 \angle 0^\circ) = 12.35 \angle 2.78^\circ \Omega$$

والآن تيار الفرع هو

$$I_L = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{12.35 \angle 2.78^\circ} = 9.73 \angle -2.78^\circ \text{ A}$$

، الجهد على الحمل هو

$$V_{BO} = I_L Z_p = (9.73 \angle -2.78^\circ)(11.55 \angle 0^\circ) = 112 \angle -2.78^\circ \text{ V}$$

وجهد الفرع المتناظر هو  $V_L = \sqrt{3}(112) = 194 \text{ volts}$

وكان في الفصل السابع فإننا نلاحظ أن حامل القدرة قد تمكن بتوصيل مكثفات على التوازي مع الحمل ويبلغ من هذا مربوط في الجهد على معاوقة الفرع . وعلى هذا فإنه في هذه المسألة يجب جهد النظام من 208 V إلى 194 V بدلاً من 189 V كما في المسألة ١٤ - ١٩ .

### مسائل إضافية

- ٢١ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها  $10 / 53.1^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة CBA لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 240 V . أوجد تيارات الأفرع .  
الجواب :  $A: 41.6 \angle -23.1^{\circ}$  ,  $B: 41.6 \angle -143.1^{\circ}$  ,  $C: 41.6 \angle 96.9^{\circ}$
- ٢٢ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها  $15.9 / 70^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة CBA لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .  
الجواب :  $A: 646 \angle 80^{\circ}$  ,  $B: 10.9 \angle 40^{\circ}$  ,  $C: 10.9 \angle 160^{\circ}$
- ٢٣ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها  $42 / -35^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة ABC لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 350 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .  
الجواب :  $A: 7130 \angle -115^{\circ}$  ,  $B: 14.4 \angle 2^{\circ}$  ,  $C: 14.4 \angle 125^{\circ}$
- ٢٤ - ١ وصل حمل مزن على شكل النجمة معاوقاته  $6 / 45^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة CBA لنظام ذي ثلاثة أطوار - أربعة أسلاك وجهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع بما في ذلك تيار نقطة التبادل .  
الجواب :  $A: 20 \angle 105^{\circ}$  ,  $B: 20 \angle 15^{\circ}$  ,  $C: 20 \angle 135^{\circ}$  وصفر
- ٢٥ - ١ وصل حمل مزن على شكل النجمة معاوقاته  $65 / -20^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة CBA لنظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية .  
الجواب :  $A: 3320 \angle 170^{\circ}$  ,  $B: 4.26 \angle 50^{\circ}$  ,  $C: 4.26 \angle 70^{\circ}$
- ٢٦ - ١ وصل محرك تأثيري 50 hp وكفاءة تحميله الكلية 85% وعامل القدرة له 0.8 بنظام ذي ثلاثة أطوار وجهد 480 V . أوجد معاوقات النجمة للمكثفات التي يمكن إبدال المحرك بها .  
الجواب :  $4.2 / 36.9^{\circ} \Omega$
- ٢٧ - ١ وصل محرك تأثيري 25 hp ذو ثلاثة أطوار كفاءة تحميله الكلية 82% وعامل القدرة له 0.75 بنظام جهد 208 V . أوجد معاوقات دلتا المكثفات التي يمكن إبدال المحرك بها ثم أوجد القراءتين اللتين تحصل عليهما باستخدام طريقة جهازى وأثير .  
الجواب :  $17.15 \text{ kW}$  ,  $5.58 \text{ kW}$  ,  $4.28 \angle 41.4^{\circ} \Omega$
- ٢٨ - ١ وصلت ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل دلتا قيمة كل منها  $9 / -30^{\circ} \Omega$  ، وكذلك ثلاث معاوقات متساوية متصلة على شكل النجمة قيمة كل منها  $5 / 45^{\circ} \Omega$  ، بالمتتابعة ABC لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 480 V . أوجد قيمة الفرع والقدرة الكلية .  
الجواب :  $A: 119.2$  و  $99 \text{ kW}$
- ٢٩ - ١ وصل حمل مزن على شكل دلتا معاوقاته  $27 / -25^{\circ} \Omega$  وحمل آخر مزن على شكل نجمة ومعاوقاته  $10 / 30^{\circ} \Omega$  بالمتتابعة ABC لنظام ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V . أوجد تيارات الأفرع والقدرة في كل حمل .  
الجواب :  $A: 4340 \angle -122.6^{\circ}$  ,  $B: 25.3 \angle -2.4^{\circ}$  ,  $C: 25.3 \angle 117.4^{\circ}$  و  $3740 \text{ W}$

١٤- ٣٠ نظام ذو ثلاثة أطوار بجهد 100 V يتلقى حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته  $\Omega \angle 36.9^\circ -$  و  $10 / -$  وكذلك حمل متزن على شكل النتيجة معاوقاته  $\Omega \angle 53.1^\circ$  . أوجد القدرة في كل حمل وقيمة التيار الفرمي السكل .

الجواب : 2400 W, 1200 W, 20.8 A

١٤- ٣١ وصل حليين متزئين كل سببا على شكل دلتا وساقاتها  $\Omega \angle 60^\circ -$  و  $20 / -$   $\Omega \angle 45^\circ$  على الترتيب بنظام ذي ثلاثة أطوار بجهد 150 V . أوجد القدرة في كل حمل . الجواب : 2650 W و 1690 W

١٤- ٣٢ نظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V وصلت مجموعة CBA بثلاثة أحمال متزنة أشكال توصيلها ومعاوقاتها كما يلي : شكل نجمة معاوقاته  $\Omega \angle 0^\circ$  و شكل دلتا معاوقاته  $\Omega \angle 90^\circ$  و شكل دلتا ثالث معاوقاته مجموعة . أوجد هذه المعاوقة علماً بأن تيار الفرع A هو  $A \angle 138.1^\circ -$  و  $32.7 / -$  وذلك بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل . الجواب :  $\Omega \angle 45^\circ$  و 18

١٤- ٣٣ إذا كانت قراءات جهاز واتميتر المتصلين في الفرعين A و B لنظام CBA بجهد 120 V هما 1500 W و 500 W على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن الذي على شكل دلتا . الجواب :  $\Omega \angle 41^\circ -$  و 16.3

١٤- ٣٤ إذا كانت قراءات جهاز واتميتر المتصلين في الفرعين A و B لنظام ABC بجهد 173.2 V هما 301 W - و 1327 W + على الترتيب . فأوجد معاوقة الحمل المتزن ذي شكل نجمة . الجواب :  $\Omega \angle 70^\circ -$  و 10

١٤- ٣٥ أوجد قراءات جهاز واتميتر المستعملين في نظام ذي ثلاثة أسلاك وجهد 240 V ويؤثر على حمل متزن على شكل دلتا معاوقاته  $\Omega \angle 80^\circ$  . الجواب : 3210 W و 1710 W -

١٤- ٣٦ وصل جهاز واتميتر في الفرعين B و C للنظام CBA - ثلاثة أسلاك وجهد 173.2 V الذي يؤثر على حمل متزن . أوجد قراءات الجهازين علماً بأن تيار الفرع هو  $A \angle 41.9^\circ -$  و  $32.7 / -$   $I_A$  . الجواب : 5370 W و 1170 W

١٤- ٣٧ يتلقى النظام CBA الذي بجهد 100V حمل متزن ومتصل فيه جهازا واتميتر في الفرعين A و B فإذا كان  $A \angle 40^\circ -$  و  $I_B = 10.9$  هو تيار الفرع B فأوجد قراءات الواتميتر .

الجواب : 835 W , 189 W -

١٤- ٣٨ وصل حمل على شكل دلتا معاوقاته  $\Omega \angle 30^\circ$  و  $Z_{AB} = 10$  و  $Z_{BC} = 25$  و  $Z_{CA} = 20$   $\Omega \angle 30^\circ$  ohms . أوجد تيارات الأفرع والقدرة الكلية . بالنظام ABC في الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 500 V .

الجواب : 42.4 kW ,  $A \angle 231.3^\circ$  ,  $A \angle 68.2^\circ$  , 53.9  $A \angle 90^\circ$  و 75

١٤- ٣٩ يتلقى حمل على شكل دلتا معاوقاته  $\Omega \angle 0^\circ$  و  $Z_{AB} = 5$  و  $Z_{BC} = 4$   $\Omega \angle 30^\circ$  ohms

من شتاق ABC في الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 208 V .

أوجد تيارات الأفرع وقراءات جهاز واتميتر في الفرعين A و C .

الجواب : 11.25 kW , 13.7 kW ,  $A \angle 187.9^\circ$  , 54.6  $A \angle 43.3^\circ$  , 90.5  $A \angle 99.65^\circ$  و 70.5

١٤- ٤٠ يتلقى حمل على شكل النتيجة معاوقاته  $\Omega \angle 0^\circ$  و  $Z_A = 3 + j0$  و  $Z_B = 2 + j\beta$  و  $Z_C = 2 - j\alpha$  ohms

من النظام CBA في ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد 100 V . أوجد تيارات الأفرع بما في ذلك تيار الفرع المتصل بفرض أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه إلى الحمل .

الجواب :  $A \angle 65.3^\circ$  , 27.3  $A \angle 176.6^\circ$  , 25.8  $A \angle 26.3^\circ$  , 16  $A \angle 90^\circ$  و 19.25

١٤-٤١ حل على شكل النجمة وموازاته  $Z_A = 12 \angle 45^\circ \text{ ohms}$  و  $Z_B = 10 \angle 30^\circ \text{ ohms}$  و  $Z_C = 8 \angle 0^\circ \text{ ohms}$

متصل بنظام جهده  $208 \text{ V}$  وبه أربعة أسلاك . أوجد القدرة الكلية .

الجواب :  $3898 \text{ W}$

١٤-٤٧ إذا كانت تيارات الأفرع في النظام  $ABC$  في الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهه  $220 \text{ V}$  هي

$$I_A = 43.5 \angle 116.6^\circ \text{ A} , I_B = 43.3 \angle -48^\circ \text{ A} , I_C = 11.39 \angle 218^\circ \text{ A}$$

الواتية في الأفرع (أ)  $A$  و  $B$  ، (ب)  $B$  و  $C$  ، (ج)  $C$  و  $A$  .

الجواب : (أ)  $6370 \text{ W}$  و  $5270 \text{ W}$  ، (ب)  $2330 \text{ W}$  و  $9310 \text{ W}$  ، (ج)  $1980 \text{ W}$  و  $9550 \text{ W}$

١٤-٤٣ إذا كانت تيارات الأفرع في النظام  $ABC$  في الثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهه  $440 \text{ V}$  هي

$$I_A = 19.72 \angle 90^\circ \text{ A} , I_B = 57.3 \angle -9.9^\circ \text{ A} , I_C = 57.3 \angle 189.9^\circ \text{ A}$$

الواتية في الأفرع (أ)  $A$  و  $B$  ، (ب)  $B$  و  $C$  .

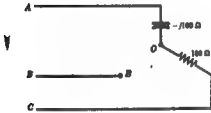
الجواب (أ) :  $7.52 \text{ kW}$  و  $24.8 \text{ kW}$  (ب)  $16.15 \text{ kW}$  و  $16.15 \text{ kW}$

١٤-٤٤ يوضح الشكل المطاوع ١٤-٤٤ تيارات الأفرع وجهود الأفرع بالنسبة لبعضها وذلك لنظام  $ABC$  في الثلاثة

أطوار - ثلاثة أسلاك وجهه  $346 \text{ V}$  . فإذا كان تيار الفرع يساوي  $10 \text{ A}$  ، فأوجد معاداة الحمل التي على شكل

النجمة والمتصل بهذا النظام .

الجواب :  $20 \angle 90^\circ \Omega$



شكل ١٤-٤٠



شكل ١٤-٤٢

١٤-٤٥ توصف دائرة الشكل ١٤-٤٥ بوجود معاداة لانهاية ( دائرة مفتوحة ) متصلة في الطور  $B$  للحمل الذي على شكل نجمة . أوجد الجهد المطاوع  $V_{OB}$  علماً بأن جهده النظام  $ABC$  هو  $208 \text{ V}$  الجواب :  $284 \angle 150^\circ \text{ V}$

١٤-٤٦ حل على شكل نجمة متصل بنظام في ثلاثة أطوار جهده المطاوع  $400 \text{ V}$  فإذا كان الحد الأقصى لتيار في كل ملف هو

$35 \text{ A}$  ، (أ) فأوجد معدل القدرة  $\text{kVA}$  هذه الآلة ؟ (ب) إذا كان النظام عند الأفرع بتيار  $20 \text{ A}$  بمعدل قدرة

$0.65 \text{ kVA}$  لكل طور في الآلة ؟ . الجواب :  $26.6 \text{ kVA}$  و  $5.08 \text{ kVA}$

١٤-٤٧ إذا كانت قيمة التيار في مجسم التيارات المترفة في الشكل المطاوع ١٤-٤٦ هي  $10 \text{ A}$  وجهده الفرع هو  $120 \text{ V}$  .

فأوجد القدرة الكلية والقدرة الظاهرية  $\text{VA}$  المتناظرتين .

الجواب :  $1.47 \text{ kW}$  و  $2.08 \text{ kVA}$

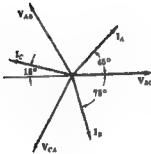
١٤-٤ وصل حمل على شكل نجمة معاوقات  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$

و  $Z_B = 10 \angle 60^\circ \text{ ohms}$  و  $Z_C = 10 \angle -60^\circ \text{ ohms}$

بنظام  $ABC$  ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد  $200 \text{ V}$  ،

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل  $V_{AO}$  و  $V_{BO}$  و  $V_{CO}$

الجواب :  $173 \angle 90^\circ \text{ V}, 100 \angle 0^\circ \text{ V}, 100 \angle 180^\circ \text{ V}$



شكل ١٤-٤

١٤-٤ وصل حمل على شكل النجمة معاوقات  $Z_A = 10 \angle -60^\circ \text{ ohms}$

و  $Z_B = 10 \angle 0^\circ \text{ ohms}$  و  $Z_C = 10 \angle 60^\circ \text{ ohms}$

بنظام  $CBA$  ذي ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد  $208 \text{ V}$

أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب :  $208 \angle -120^\circ \text{ V}, 0, 208 \angle 180^\circ \text{ V}$

١٤-٥ يغذى نظام  $ABC$  ذو ثلاثة أسلاك وجهد  $480 \text{ V}$  حمل على شكل نجمة معاوقات  $Z_A = 10 \angle 0^\circ \Omega$

و  $Z_B = 5 \angle -30^\circ \Omega$  و  $Z_C = 5 \angle 30^\circ \Omega$  أوجد قراءات الواطميتر في الفرعين  $A$  و  $B$  .

الجواب :  $8.92 \text{ kW}$  و  $29.6 \text{ kW}$

١٤-٥ يغذى نظام  $CBA$  ذو ثلاثة أسلاك وجهد  $100 \text{ V}$  حمل على شكل نجمة معاوقات  $Z_A = 3 + j0 \text{ ohms}$

و  $Z_B = 2 + j3 \text{ ohms}$  و  $Z_C = 2 - j1 \text{ ohms}$  أوجد الجهود عبر معاوقات الحمل .

الجواب :  $31.6 \angle -67.9^\circ \text{ V}, 84.3 \angle 42.7^\circ \text{ V}, 68.6 \angle 123.8^\circ \text{ V}$

١٤-٥ يتصل نظام ذو ثلاثة أطوار - ثلاثة أسلاك وجهد  $240 \text{ V}$  بثلاث معاوقات متساوية على شكل نجمة قيمة كل منها  $15 \angle 60^\circ \Omega$  فإذا كانت معاوقة كل فرع بين المصدر والحمل هي  $2 + j1 \Omega$  فأوجد قيمة جهد الفرع عند الحمل .

الجواب :  $213 \text{ V}$

١٤-٥ كرر المسألة ١٤-٥ مع اعتبار أن معاوقات الحمل النجمية الشكل قيمة كل منها  $15 \angle -60^\circ \Omega$  ثم قارن بين

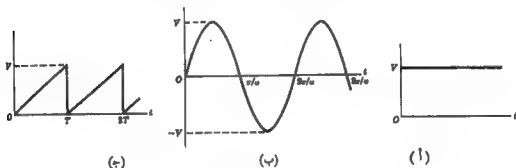
النتيجتين برسم الأشكال المطورة للجهود . الجواب :  $235 \text{ V}$

## الفصل الخامس عشر

### طريقة فوريير لتحليل الشكل الموجي

#### مقدمة :

اعتبرنا في الفواقر التي سبقت دراستها حالة الاستجابة المستقرة الناتجة من إثارة لها شكل ثابت أو شكل جيبى . وفي حال هذه الحالات يطبق تعبير واحد للدوال المؤثرة عند جميع قيم الزمن ، مثال ذلك : لدينا المادة ، ثابت  $v = v$  ، في حالة التيار المستمر  $v = V_{\max} \sin \omega t$  في حالة التيار المتردد وذلك لجميع قيم  $t$  كما في الشكل ١-١٠ (أ) ، (ب) .



شكل ١٥ - ١

في الشكل ١-١٠ (ج) الشكل الموجي الدوري المسمى بمن المنشار وهو مثال لذلك النوع الموجي الذي يمكن وصفه بدقة وحيدة في فترة ما . وعلى ذلك فإن من المنشار يعبر عنه بالدالة  $f(t) = (V/T)t$  في الفترة الزمنية  $0 < t < T$  وبالدالة  $f(t) = (V/T)(t - T)$  في الفترة الزمنية  $T < t < 2T$  . وبالرغم من أن هذه المعادلات تصف الشكل الموجي بطريقة مرضية تدريجياً فإنها لا تسمح بتعيين استجابة الدائرة . والآن إذا أمكن التعبير عن الدالة الدورية بمجموع محدود أو غير محدود لدوال جيبية ، فإنه يمكن تعيين استجابات الشبكات الكهربائية الخطية لإثارة جيبية وذلك بتطبيق نظرية التراكب . وطريقة فوريير تعطينا حل مثل هذه المسائل .

#### متسلسلة فوريير المثلثية :

أي شكل موجي دوري يحقق المعادلة  $f(t) = f(t + T)$  يمكن التعبير عنه بمتسلسلة فوريير طالما أن :

( ١ ) إذا كان الشكل الموجي غير متصل فإن عدد الانقطاعات في الزمن الدوري  $T$  محدود .

( ٢ ) له قيمة متوسطة محدودة في الزمن الدوري  $T$  .

( ٣ ) له عدد محدود من القيم القطعية الموجبة والسالبة .



متداً تتحقق هذه الشروط المسبقة فيكون متسلسلة فورييه تكون موجودة ويمكن كتابتها على الشكل التالي .

$$(1) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots$$

وتعين معاملات فورييه  $a$  و  $b$  للشكل موجي معطى عن طريق حساب التكاملات . ونحصل على معامل جيب التمام في التكامل بضرب طرق المعادلة ( ١ ) في  $\cos n\omega t$  ثم إجراء التكامل على زمن دورى كامل . والزمن الدورى الأساسى  $2\pi/\omega$  هو زمن المتسلسلة الدورى حيث أن كل حد في المتسلسلة له تردد عبارة عن مضاعفات صحيحة للتردد الأساسى .

$$(2) \quad \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}a_0 \cos n\omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} a_1 \cos \omega t \cos n\omega t \, dt + \dots \\ + \int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^n n\omega t \, dt + \dots + \int_0^{2\pi/\omega} b_1 \sin \omega t \cos n\omega t \, dt \\ + \int_0^{2\pi/\omega} b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t \, dt + \dots$$

وجميع التكاملات الممنوعة آتى في الطرف الأيمن في المعادلة ( ٢ ) تساوى صفراً ما عدا  $\int_0^{2\pi/\omega} a_n \cos^n n\omega t \, dt$  إلى قيمة  $\frac{2\pi}{\omega} a_n$  . إذن

$$(3) \quad a_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$$

ونحصل على معاملات الجيب في التكامل بضرب طرق المعادلة ( ١ ) في  $\sin n\omega t$  ثم التكامل كما سبق .

$$(4) \quad b_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$$

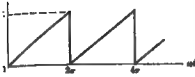
ومناك شكل آخر للتكاملات المحصورة وآتى لها تعبير  $\omega t$  يناظر دورة  $2\pi$  radians وهو

$$(5) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n\omega t \, d(\omega t)$$

$$(6) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin n\omega t \, d(\omega t)$$

ويجب أن نحوى حدود التكامل على دورة كاملة وليس من الضروري أن تكون من 0 إلى  $T$  أو من 0 إلى  $2\pi$  . على ذلك فإنه يمكن إجراء التكامل من  $T/2$  إلى  $T/2$  أو من  $-\pi$  إلى  $+\pi$  أو على دورة كاملة تبسط التكامل . ونحصل على الثابت  $a_0$  من المعادلة ( ٣ ) أو المعادلة ( ٥ ) بوضع  $n=0$  ، وحيث أن  $a_0/2$  هو القيمة المتوسطة للمدالة فإنه يمكن تعيينها عادة بفحص الشكل الموجي . ومتسلسلة المعاملات آتى حصلنا عليها من حساب التكاملات تتقارب بانتظام إلى شكل الدالة عند جميع النقط المتصلة وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند النقط غير المتصلة .

### مثال ١ :



شكل ١ - ٢

أوجد متسلسلة فورييه للشكل الموجي الموضح في الشكل ١ - ٢ .  
الشكل الموجي متصل في الفترة  $0 < \omega t < 2\pi$  ويصلي بالمعادلة  $f(t) = (10/2\pi)\omega t$  ، وهي غير متصلة عند  $\omega t = n2\pi$  ، حيث  $n = 0, 1, 2, \dots$  . إن شروط ديرشليت متحققة وكل ذلك فإن معاملات فورييه يمكن حسابها باستخدام المادتين (٦) و (٧) وبالفحص نجد أن القيمة المتوسطة للدالة هي 5 وكل ذلك فإن  $a_0 = 5$  ، والآن باستخدام المعادلة (٥) نجد أن :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[ \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t + \frac{1}{n^2} \cos n\omega t \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{10}{2\pi^2} (\cos n2\pi - \cos 0) = 0 \quad \text{وذلك لجميع قيم الصحيحة } n$$

وكل هذا فإن المتسلسلة لا تتقوى على حدود الجيب تمام . وباستخدام المعادلة (٦) نحصل على

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{10}{2\pi}\right) \omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{10}{2\pi^2} \left[ -\frac{\omega t}{n} \cos n\omega t + \frac{1}{n^2} \sin n\omega t \right]_0^{2\pi} = -\frac{10}{n^2}$$

وباستخدام معاملات حدود الجيب والحد المتوسط فإن المتسلسلة هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi^2} \sin \omega t - \frac{10}{9\pi^2} \sin 3\omega t - \frac{10}{25\pi^2} \sin 5\omega t - \dots = 5 - \frac{10}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n^2}$$

يمكن تجميع حدود الجيب والجيب تمام التي لها نفس التردد في حد جيبى أو حد جيبى تمام له زاوية طور . وينتج لدينا شكلان آخران للمتسلسلة :

$$(٧) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \cos(n\omega t - \theta_n)$$

$$(٨) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum c_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{و}$$

حيث  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ،  $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$  ،  $\varphi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$  ،  $c_n$  و  $\varphi_n$  هما سعة التردد وزاوية طور التردد ( $\theta_n$  أو  $\varphi_n$ ) .

### متسلسلة فورييه الأسية :

إذا جربنا على كل حد من حدود الجيب تمام في المتسلسلة ذات السبب الثلاثية بقرينة الأسية المكافئة ينتج متسلسلة حدودها أسية على الشكل .

$$(٩) \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \left( \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) + a_2 \left( \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} \right) + \dots$$

$$+ b_1 \left( \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) + b_2 \left( \frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{2j} \right) + \dots$$

وإعادة ترتيب الحدود

$$(10) \quad f(t) = \dots + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{b_2}{2j}\right) e^{-j\omega t} + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2j}\right) e^{-j\omega t} \\ + \frac{a_0}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2j}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2j}\right) e^{j\omega t} + \dots$$

ولنفرض الآن الثابت المركب  $A$  بالمعادلات

$$(11) \quad A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n), \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (١٠) على الصورة

$$(12) \quad f(t) = \{\dots + A_{-2}e^{-j2\omega t} + A_{-1}e^{-j\omega t} + A_0 + A_1e^{j\omega t} + A_2e^{j2\omega t} + \dots\}$$

ولإجراء التكامل الحصول على معادلات  $A_n$  فإننا نضرب طرفي المعادلة (١٢) بـ  $e^{-jn\omega t}$  ثم نكامل على دورة كاملة :

$$(13) \quad \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t) = \dots + \int_0^{2\pi} A_{-2} e^{-j2\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_{-1} e^{-j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ + \int_0^{2\pi} A_0 e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \int_0^{2\pi} A_1 e^{j\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots \\ + \int_0^{2\pi} A_n e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} d(\omega t) + \dots$$

وجميع التكاملات التي في الطرف الأيمن في المعادلة (١٣) تساوي صفراً ما عدا  $\int_0^{2\pi} A_n d(\omega t)$  التي قيمته  $2\pi A_n$  إذن

$$(14) \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-jn\omega t} d(\omega t)$$

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

أو مع اختصار  $t$  كتغير

وكان في حساب التكاملات الحصول على  $a_n$  و  $b_n$  ، فإن جهود التكامل في المعادلة (١٤) يجب أن تعمل أي دورة كاملة تشمل عملية التكامل ولا يشترط أن تكون من 0 إلى  $2\pi$  أو من 0 إلى  $T$  .

يمكن اشتقاق معادلات المتسلسلة ذات النسب الخلفية من معادلات المتسلسلة كما يلي :

أولاً لنضيف ثم نطرح التعبيرات التالية على  $A_n$  و  $A_{-n}$  من المعادلة (١١) . إذن

$$A_n + A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - j b_n + a_n + j b_n)$$

$$(15) \quad a_n = A_n + A_{-n} \quad \text{ونبها نحمده أن}$$

$$A_n - A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - j b_n - a_n - j b_n)$$

$$(16) \quad b_n = j(A_n - A_{-n}) \quad \text{أو}$$

## مثال ٢ :



شكل ١٥ - ٢

أوجد متسلسلة فورييه الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٢. استخدم معاملات هذه المتسلسلة الأسية لتحصل على  $a_n$  ،  $b_n$  للمتسلسلة ذات النسب المثلثية ثم قارن بالمثال ١ .  
تسلي الدالة في الفترة  $0 < \omega t < 2\pi$  بالمعادلة  $f(t) = (10/2\pi)\omega t$  وبالتفحص نلاحظ أن القيمة المتوسطة للدالة هي 5 . وبالتفويض من  $f(t)$  في المعادلة (١٤) نحصل على المعاملات  $A_n$  .

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{10}{2\pi} \right) \omega t e^{-jnt} d(\omega t) = \frac{10}{(2\pi)^2} \left[ \frac{e^{-jnt}}{(-jn)^2} (-jnt - 1) \right]_0^{2\pi} = j \frac{10}{2\pi n}$$

وبادخال المعاملات  $A_n$  في المعادلة (١٢) ، تكون متسلسلة فورييه الأسية للشكل الموجي المبني هي

$$(١٧) \quad f(t) = \dots - j \frac{10}{4\pi} e^{-j2nt} - j \frac{10}{2\pi} e^{-jnt} + 5 + j \frac{10}{2\pi} e^{jnt} + j \frac{10}{4\pi} e^{j2nt} + \dots$$

معاملات حدود الجيب تمام في المتسلسلة المثلثية هي

$$a_n = A_n + A_{-n} = j \frac{10}{2\pi n} + j \frac{10}{2\pi(-n)} = 0$$

ومعاملات حدود الجيب هي

$$b_n = j(A_n - A_{-n}) = j \left( j \frac{10}{2\pi n} - j \frac{10}{2\pi(-n)} \right) = -\frac{10}{\pi n}$$

وعلى ذلك فإن المتسلسلة ذات النسب المثلثية لا تحتوي على حدود جيب تمام لأن  $a_n = 0$  لجميع قيم  $n$  ومعاملات الحد الجيب هي  $10/(\pi n)$  . والقيمة المتوسطة هي 5 والمتسلسلة هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin nt - \frac{10}{2\pi} \sin 2nt - \frac{10}{3\pi} \sin 3nt - \dots$$

وهي كما في المثال ١ .

## تمثيل الشكل الموجي :

تحتوي المتسلسلة التي حصلنا عليها في المثال ١ على حدود جيبية بالإضافة إلى حد ثابت . وهناك أشكال موجية تحتوي فقط على حدود جيب تمام ، وفي بعض الأحيان تحتوي المتسلسلة على ترددات فردية سواء كانت تحتوي المتسلسلة على حدود جيبية أو جيب تمامية أو الإثنين معاً . وهذا نتيجة لبعض أنواع التمثيل التي يتبع الشكل الموجي . وبمعركة هذا التمثيل فإنه يمكن اختصار الحسابات اللازمة لتحسين المتسلسلة . ولهذا الغرض فإنه من المهم كتابة التصريفات التالية :

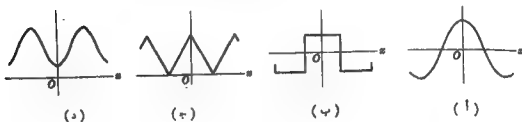
$$١ - \text{يقال إن الدالة } f(x) \text{ زوجية إذا كان } f(x) = f(-x) .$$

الدالة  $f(x) = x^2 + x^4 + x^6$  هي مثال الدوال الزوجية وذلك لتساوي قيم الدالة عند  $x$  و  $-x$  . الجيب تمام دالة زوجية حيث يمكن التعبير عنها بمتسلسلة على الشكل .

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

مجموع دالتين زوجيتين أو أكثر هو دالة زوجية ، وبإضافة حد ثابت فإن زوجية الدالة لا تزال قائمة .

يوضح الشكل ١٥-٤ أشكال موجية لدوال زوجية وهي متألقة بالنسبة المحور الرأسى .



شكل ١٥ - ٤

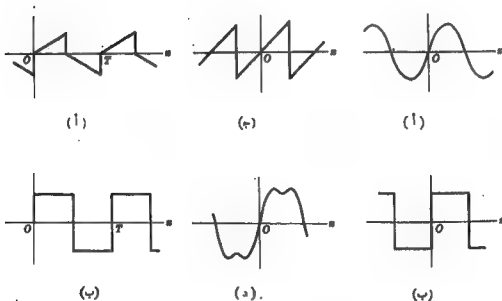
٢ - يقال إن الدالة  $f(x)$  فردية إذا كان  $f(-x) = -f(x)$  .

الدالة  $\sin x$  ،  $\cos x$  ،  $\tan x$  هي مثال للدوال الفردية وذلك لأن قيم الدالة عند  $x$  ،  $-x$  لها إشارات معاكسة .  
والجيب دالة فردية حيث يمكن التعبير عنه على الشكل

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

مجموع دالتين فرديتين أو أكثر هو دالة فردية ، ولكن إضافة حد ثابت يزيل فردية الدالة حيث  $f(x)$  لا تظل متساوية  $f(-x)$  . إن حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية .

يثل الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥ دوال فردية .

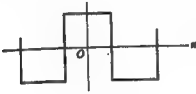


شكل ١٥ - ٥

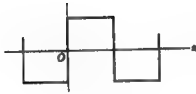
شكل ١٥ - ٥

٢- يقال إن الدالة التورية  $f(x)$  لها تماثل نصف موجي إذا كان  $f(x) = -f(x + T/2)$  حيث  $T$  وزن التورية . يوضح الشكل ١٥ - ٦ شكلين موجيين لهما تماثل نصف موجي . وبمعرفة نوع تماثل الشكل الموجي يمكن الوصول إلى الاستنتاجات التالية :

إذا كان الشكل الموجي زوجياً فإن جميع حدود المتسلسلة المناظرة له هي حدود جيب تمام مع احتمال وجود ثابت إذا كان الشكل الموجي قيمة متوسطة . وحل ذلك نأخذنا لا نحتاج إلى حساب قيمة التكامل الموصول على المداخل  $H$  حيث لا يوجد حدود جيبية . وإذا كان فردياً فإن المتسلسلة تحتوي على حدود جيبية فقط . والدالة يمكن أن تكون فردية فقط بعد حذف الثابت ، وفي هذه الحالة فإن متسلسلة فورييه المناظرة لها تحتوي على هذا الثابت بالإضافة إلى متسلسلة من الحدود الجيبية . إذا كان الشكل الموجي تماثل نصف موجي فإنه

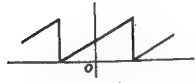


(أ)



(ب)

شكل ١٥ - ٦



(أ)



(ب)

شكل ١٥ - ٧

يوجد في المتسلسلة ترددات فردية فقط . وهذه المتسلسلة تحتوي على حدود جيبية وجيب تمامية ما لم تكن الدالة فردية أو زوجية . وفي أي حالة فإن كلا من  $H_0$  و  $H_1$  يساوي صفراً عندما  $n = 2, 4, 6, \dots$  وذلك لأي شكل موجي له تماثل نصف موجي .

بعض الأشكال الموجية يمكن أن تكون فردية أو زوجية على حسب موضع المحور الرأس . والموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥ - ٧ (أ) تحقق شرط الدالة الزوجية ، أي أن  $f(x) = f(-x)$  ينتج عن إزاحة المحور الرأس إلى الموضع الموضح في الشكل ١٥ - ٧ (ب) دالة فردية حيث  $f(x) = -f(-x)$  . وإذا وضع المحور الرأس عند أي نقطة غير التقاطع الموضحين في الشكل ١٥ - ٧ فإن الموجة المربعة تصبح لا فردية ولا زوجية . وتحتوي متسلسلتها في هذه الحالة على حدود جيبية وجيب تمامية معاً . وعلى ذلك فإنه في تحليل الدوال التورية يجب اختيار موضع مناسب للمحور الرأس حتى ينتج لدينا دالة زوجية أو فردية وذلك طالما أن نوع الشكل الموجي يسمح بذلك .

إن إزاحة المحور الأفقي يمكن أن تبسط المتسلسلة التي تمثل الدالة . وكما أن حل ذلك فإن الشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥ - ٨ (أ) لا يحقق شروط الدالة الفردية إلا إذا حللنا القيمة المتوسطة كما هو موضح في الشكل ١٥ - ٨ (ب) . وعلى هذا فإن متسلسله تحتوي على حد ثابت بالإضافة إلى جميع الحدود الجيبية .

بما أن المتسلسلة الأسية المناظرة للجيب هي متسلسلة تعقيلية تماماً والمتسلسلة الأسية المناظرة للجيب تمام هي متسلسلة حقيقية تماماً ، فإنه يمكن استخدام شروط التماثل السابقة لاختيار معاملات للمتسلسلة الأسية . يحوي الشكل الموجي الزوجي على حدود جيب تمامية فقط وعلى ذلك فإن متسلسله الحقيقية . وبالتالي معاملات فورييه الأسية يجب أن تكون أعداد حقيقية تماماً . وبالتساوي فإن الدوال الفردية التي تتكون متسلسلتها الحقيقية من حدود جيبية تكون معاملات متسلسلتها الأسية تعقيلية تماماً .

## الطيف الخطي :

يسمى الرسم الذي يوضح كلا من السمات التوافقية في الموجة بالطيف الخطي . وتتناقص الخطوط سريعاً بالموجات التي تتقارب بتسلسلها بسرعة . والموجات غير المتصلة مثل من المنشار والموجة المربعة لها أطراف تتناقص سماتها ببطء وذلك لأن تسلسلها توافقيات عالية قوية . وعادة تكون الترددات العشرة الأولى قيم سمات ملحوظة بالمقارنة بالتردد الأساسي . وعلى العكس فإن تسلسلات الترددات الموجبة التي لا يوجد بها عدم اتصال والتي تمثل عادة بخط سلس تتقارب بسرعة إلى الصفر وتحتاج في هذه الحالة فقط إلى حدود قليلة لتمثيل الموجة . ويتضح هذا التقارب السريع من الطيف الخطي حيث تتناقص سمات الترددات بسرعة . وعلى ذلك فإن قيمة سمات التردد الخامس أو السادس تكون غير ملحوظة .

الترددات والطيف الخطي لأي موجة هما جزء من طبيعة الموجة نفسها لا يعتبران مهما تكن طريقة التحليل . وبإزاحة نقطة الأصل نحصل على متسلسلة لاسب مختلفة تختلف تماماً في ظاهرها ، أيضاً تعتبر كثير من المتسلسلات الآتية بإزاحة نقطة الأصل ، ولكن يظهر دائماً نفس التردد في المتسلسلة وكذلك تظل سماتها التي تعطى بالمعادلة  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  أو  $c_n = |A_n| + |A_{-n}|$  ثابتة .

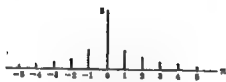
يوضح الشكل ١٥ - ٩ موجة من المنشار في المثال (١) وكذلك طيفها . وبما أنه يوجد حدود جيبية فقط في المتسلسلة فإن التردد  $C_0$  يعطي مباشرة من  $b_0$  .



الترددات الأسبوعية :

شكل ١٥ - ٩

يوضح الشكل ١٥ - ١٠ متسلسلة أسية لترددات حدودها  $n\omega + m\omega$  (أنظر المعادلة ١٧) وكذلك طيفها . والسمات الفعلية لتردد معين هو مجموع سمتين إحداها عند  $n\omega$  والأخرى عند  $m\omega$  . ونجد في الطيف الموضح في الشكل ١٥ - ١٠ خطوط سماتها  $10/4\pi$  عند  $n = -2$  و  $n = 2$  . وبمجموعهما نحصل على  $10/2\pi$  وهي السمة الفعلية لهذا التردد وهي تتفق مع الطيف الموضح في الشكل ١٥ - ٩ .



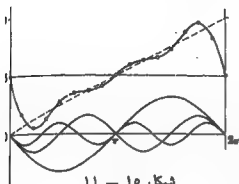
شكل ١٥ - ١٠

## تركيب الشكل الموجي :

تركيب الشكل الموجي هو جمع الأجزاء التي يتكون منها الشكل الكلي . وهو في تحليل فوريير عبارة عن جمع حدود المتسلسلة ذات النسب المثالية ، وعادة تكون الآرية أو الخمسة الحدود الأولى . وبعد تركيب الموجة فإنه يمكن الطالب أن يفتتح أن متسلسلة فوريير تعبر في الواقع عن الموجة الفوقية التي حصل عليها .

والمتسلسلة المثالية لموجة من المنشار في المثال (١) . والتي لها سمات على 10 هي

$$f(t) = 5 - \frac{10}{\pi} \sin \omega t - \frac{10}{2\pi} \sin 2\omega t - \frac{10}{3\pi} \sin 3\omega t - \dots$$



شكل ١٠ - ١١

وفي الشكل ١٠ - ١١ رسمت هذه الحدود الأربعة بالإضافة إلى مجموعها وبإلزام من أن النتيجة ليست موجبة من مفسار تماماً فأنه من الواضح أنه بإضافة حدود أخرى فإن الرسم يقترب من من المفسار . بما أن هذه الموجة غير متصلة عند حدة نقط فإن متسلسلتها لا تتقارب بسرعة وبالتالي فإن استخدام أربعة حدود لتكوين الشكل الموجي لا ينتج عنه نتيجة سليمة تماماً . وسنة أخذ المثال الذي تردده 400 هـ  $10/4\pi$  لها قيمة محسوسة بالنسبة الحدة الأساسية  $10/\pi$  . وكل حدة يضاف في تركيب الشكل الموجي يقلل من عدم الانظام الناتج وبذلك يتحسن تقريب الشكل الموجي الأساسي . وهذا ما كنا نلتميه عند قولنا سابقاً إن المتسلسلة تتقارب إلى الدالة عند جميع نقاط الاتصال وتتقارب إلى القيمة المتوسطة عند نقاط عدم الاتصال . يتضح من الشكل ١٠ - ١١ عند النقط 0 و  $2\pi$  أن القيمة 5 تظل كما هي وذلك لأن جميع الحدود الجيبية تساوي صفراً عند هاتين النقطتين ، وهي نقط عدم الاتصال ، وقيمة الدالة عندما تقترب من جهة اليسار هي 10 وعندما تقترب من جهة اليمين 0 وقيمتها المتوسطة هي 5 .

### القدرة والقيمة الفعالة :

ينتج من تيار على شكل موجة دورية غير جيبية ومار في مقاومة قدرة تعين بالقيمة الفعالة أو جذر متوسط مربع القيمة ( rms ) لوجوه . ولقد وجدنا في الفصل الثاني أن القيمة الفعالة لدالة على الشكل

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

حي

$$(18) \quad F_{rms} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \dots + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \dots}$$

وبالتصغير عن سعة التردد بالمعادلة  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  وكاتب  $c_0$  لمتوسط القيمة ، نجد من المعادلة (18) أن

$$F_{rms} = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2^2 + \frac{1}{2}c_3^2 + \dots}$$

وباعتبار شبكة كهربائية خطية يؤثر عليها جهد دوري ، يمكننا أن نتوقع أن التيار الناتج يحتوي على نفس الحدود الترددية كما في الجهد ولكن بسمات توافقية تختلف قيمها النسبية وذلك لتغير المعاوقة مع  $\omega$  . ومن المحتمل عدم ظهور بعض الترددات في التيار حيث أنه في حالة التوازن بين التيار والمعاوقة غير محدودة . وعموماً يمكننا كتابة

$$(19) \quad i = I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad \text{و} \quad v = V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

والقيم الفعالة المناظرة هي

$$(20) \quad I_{rms} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_1^2 + \frac{1}{2}I_2^2 + \dots} \quad \text{و} \quad V_{rms} = \sqrt{V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 + \frac{1}{2}V_2^2 + \dots}$$

والقدرة المتوسطة  $P$  تلج من تكامل القدرة المظلية التي تعطي بحاصل الضرب  $v \cdot i$  .

$$(21) \quad p = v \cdot i = [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \phi_n)][I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \phi_n)]$$



بما أن كلا من  $v$  و  $i$  لهما دورة  $T_{\text{sec}}$  فإن حاصل ضربهما له عدد صحيح من دوراتهما  $T$  . (' وإذا كان الجهد المؤثر دالة جيبية واحدة فإن حاصل الضرب  $vi$  له دورة تساوي نصف دورة موجة الجهد ) . ومتوسط القدرة هو

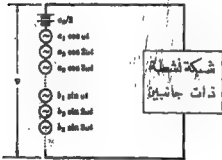
$$(٢٢) \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T [V_0 + \sum V_n \sin(n\omega t + \psi_n)] [I_0 + \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n)] dt$$

واختبار الحدود الممكنة في حاصل ضرب المتسلسلتين اللانهائيتين يوضح أنهما يحتويان على الأنواع : حاصل ضرب الثابتين ، حاصل ضرب الثابت والدالة الجيبية ، حاصل ضرب دالتين جيبيتين بترددتين مختلفتين ، مربع دالة جيبية . ونجد بعد التكامل أن حاصل ضرب الثابتين لا يزال  $V_0 I_0$  ويظهر مربع الدالة الجيبية بالحدود المطبقة على الصورة :  $(V_n I_n / 2) \cos(\psi_n - \psi_n)$  بينما تكون جميع المضارب بعد التكامل على الدورة  $T$  إلى الصفر . إذن متوسط القدرة هو

$$(٢٣) \quad P = V_0 I_0 + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 + \frac{1}{2} V_3 I_3 \cos \theta_3 + \dots$$

حيث  $\theta_n = (\psi_n - \psi_n)$  هي زاوية المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند التردد عند التردد  $n\omega \text{ rad/sec}$  ،  $V_n$  و  $I_n$  هما القيمتان العظميان لدالتى الجهد والتيار الجيبيتين . نجد في دوائر التيار المتردد وسعة التردد أن متوسط القدرة هو  $P = VI \cos \theta$  وهي معروفة في المعادلة (٢٣) حيث  $V$  هي القيمة الفعالة للجهد ،  $V = V_{\text{max}}/\sqrt{2}$  و  $I = I_{\text{max}}/\sqrt{2}$  أى أن  $P = \frac{1}{2} V_{\text{max}} I_{\text{max}} \cos \theta$  . القدرة في دوائر التيار المستمر البسيطة هي  $VI$  وهي معروفة في المعادلة (٢٣) بأنه  $V_0 I_0$  . وحل ذلك فإن معادلة القدرة (٢٣) هي معادلة عامة تماماً وتحتوى على التيار المستمر والتيار المتردد وسعة التردد وأيضاً على أمواج دورية غير جيبية . ونلاحظ أيضاً في المعادلة (٢٣) أنه لا يوجد أى إسهام في متوسط القدرة من الجهد والتيار المختلفين في التردد وعلى ذلك فإنه بالنسبة للقدرة يؤثر كل تردد على حدة .

### تطبيقات على تحليل الدوائر :



شكل ١٥ - ١٢

لقد أترحنا فيما سبق أنه يمكننا تطبيق حدود متسلسلة الجهد على شبكة نظية للحصول على الحدود الترددية المناظرة لمتسلسلة التيار . وقد حصلنا على هذه النتيجة من التركيب . وعلى هذا فإننا نستجر كل حد في متسلسلة فوريير يمثل جهداً ناتجاً عن مصدر واحد كما في الشكل ١٥ - ١٢ . والآن نستخدم المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند كل ذبذبة تردد  $n\omega$  لحساب التيار عند ذلك التردد . بمجموع هذه الاستجابات الفردية هي الاستجابة الكلية  $i$  على شكل متسلسلة والناتجة من الجهد المؤثر .

### مثال ٣ :

دائرة  $RL$  على التوالي فيها  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.02 \text{ H}$  يؤثر عليها جهد  $v = 100 + 50 \sin \omega t + 25 \sin 3\omega \text{ volts}$  حيث  $\omega = 300 \text{ rad/sec}$  . أوجد التيار والقدرة المتوسطة .



شكل ١٥ - ١٣

نحسب المعاوقة المكافئة عند كل ذبذبة . وبذلك نحصل على تيارات المناظرة .  $\omega = 0$  فإن  $Z = 5 \Omega$  و  $I_0 = V_0/R = 100/5 = 20 \text{ A}$  .

$$Z_1 = 5 + j10 \Omega \quad \omega = 500 \text{ rad/sec} \quad \text{فإن}$$

$$i_1 = \frac{V_{1 \max}}{|Z_1|} \sin(\omega t - \phi_1) = \frac{50}{11.18} \sin(\omega t - 63.4^\circ) = 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

$$Z_2 = 5 + j30 \Omega \quad \omega = 1500 \text{ rad/sec} \quad \text{فإن}$$

$$i_2 = \frac{V_{2 \max}}{|Z_2|} \sin(3\omega t - \phi_2) = \frac{25}{30.4} \sin(3\omega t - 80.54^\circ) = 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ amperes}$$

وجمع التيارات التوافقية هو الاستجابة الكلية المطلوبة

$$i = 20 \cdot 4.48 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 0.823 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ amperes}$$

والقيمة الفعالة لهذا التيار هي

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{20^2 + 4.48^2/2 + 0.823^2/2} = \sqrt{410.6} = 20.25 \text{ A}$$

والقدرة الناتجة عنها في المقاومة  $5 \Omega$  هي

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = (410.6)/5 = 2053 \text{ W}$$

وكاعتبار النتيجة فإننا نحسب متوسط القدرة بحساب القدرة الناتجة من كل تردد ثم جمعها لينتج أن

$$P = I_{\text{rms}}^2 R = 100(20) \cdot 2000 \text{ W} \quad \omega = 0$$

$$P = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos \theta_1 = \frac{1}{2} (50)(4.48) \cos 63.4^\circ = 50.1 \text{ W} \quad \omega = 500 \text{ rad/sec}$$

$$P = \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos \theta_2 = \frac{1}{2} (25)(0.823) \cos 80.54^\circ = 1.69 \text{ W} \quad \omega = 1500 \text{ rad/sec}$$

$$P_T = 2000 + 50.1 + 1.69 = 2052 \text{ W} \quad \text{إذن}$$

### طريقة أخرى :

متسلسلة الجهد المؤثر حل المقاومة هي

$$V_R = RI = 100 + 22.4 \sin(\omega t - 63.4^\circ) + 4.11 \sin(3\omega t - 80.54^\circ) \text{ volts}$$

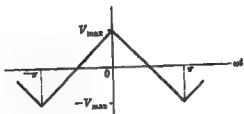
$$V_{\text{rms}} = \sqrt{100^2 + \frac{1}{2}(22.4)^2 + \frac{1}{2}(4.11)^2} = \sqrt{10239} = 101.3 \text{ V}$$

$$P = V_{\text{rms}}^2 / R = (101.3)^2 / 5 = 2052 \text{ W} \quad \text{إذن القدرة المخطأ بالمصدر هي}$$

وبنفس الطريقة تستخدم متسلسلة فورييه الأسية ليا عد أن معاوقة الدائرة يجرى فيها عادة بحدود  $1 \text{ m}\Omega$  . ويمكن حساب معاملات متسلسلة التيار  $I_{\text{rms}}$  من النسبة  $V_R/Z_R$  كما هو موضح في مثال (٤) التالي .

### مثال ٢ :

يؤثر جهد على شكل الموجة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥ - ١٤ على مكثف ذي سعة  $C$  farads .  
عين التيار الناتج .



شكل ١٥ - ١٤

دالة الجهد في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  هي  

$$v = V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t$$
 وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$  هي  

$$v = V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t$$

إذن يمكن تعيين معادلات المتسلسلة الأسيّة بحساب التكامل

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [V_{max} + (2V_{max}/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t) \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [V_{max} - (2V_{max}/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t)$$

ومنه نجد أن  $A_n = \frac{4V_{max}}{\pi^2 n^2}$  لجميع القيم  $n$  الفردية و  $A_n = 0$  لجميع قيم  $n$  الزوجية .

ومعاوقة الدائرة  $Z = 1/j\omega C$  يمكن التعبير عنها كدالة في  $n$  أي أن  $Z_n = 1/jn\omega C$  . والآن لدينا

$$I_n = \frac{V_n}{Z_n} = \frac{4V_{max}}{\pi^2 n^2} (jn\omega C) = j \left( \frac{4V_{max}\omega C}{\pi n} \right)$$

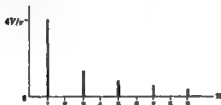
ومتسلسلة التيار هي

$$i = \sum \left( \frac{4V_{max}\omega C}{\pi n} \right) e^{jn\omega t}$$

يمكن المتسلسلة أن تقتارب إلى الشكل المثلثي وبالتالي تبين لنا تركيب الشكل الموجي للتيار . وعلى ذلك فإن هذه المتسلسلة لها نفس الشكل الناتج في المسألة ١٥ - ٨ حيث المعامل  $A_n = -(2V/\pi n)$  لقيم  $n$  الفردية فقط . والإشارة السالبة هنا تدلّ أن موجة هذا التيار هي سالب الموجة المربعة في المسألة ١٥ - ٨ وأن قيمتها العظمى هي  $(2V_{max}\omega C)/\pi$  .

### مسائل محلولة

١٥ - ١ : أوجد متسلسلة فورييه ذات النسب المثلثية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥ - ٢ وارسم الطيف العظمى لها .



في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  نجد أن  $f(t) = V$  وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$  نجد أن  $f(t) = -V$  .  
والقيمة المتوسطة للموجة تساوي صفرأ ؛ إذن  $a_0/2 = 0$  . ونحصل على معاملات الجيب تمام بكتابة التكاملات التي  
يجب حسابها مع إدخال الدوال كما يلي :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} V \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 (-V) \cos n\omega t d(\omega t) \right\} = \frac{V}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} - \left[ \frac{1}{n} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^0 \right\}$$

$$= 0$$

بمعنى قيم  $n$  .

وعلى هذا فالمتسلسلة لا تحتوي على حدود جيب تمام . وباتباع نفس الطريقة مع التكاملات التي يجب حسابها لمتعدد  
الجيبية نجد أن

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} V \sin n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 (-V) \sin n\omega t d(\omega t) \right\}$$

$$= \frac{V}{\pi} \left\{ \left[ -\frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} + \left[ \frac{1}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^0 \right\}$$

$$= \frac{V}{\pi n} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n\pi - \cos n\pi) = \frac{4V}{\pi n} (1 - \cos n\pi)$$

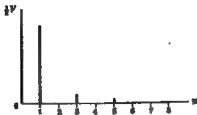
إذن  $b_n = 4V/\pi n$  عندما  $n = 1, 2, 3, \dots$  و  $b_n = 0$  عندما  $n = 2, 4, 6, \dots$  ومتسلسلة الموجة  
المركبة هي

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \sin \omega t + \frac{4V}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4V}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

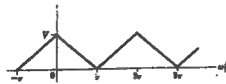
وبوضع الشكل ١٥ - ١٦ الطيف الخطي لهذه المتسلسلة . ونحتوي المتسلسلة على حدود جيبية بترددات فردية فقط وهي  
التي يمكن استخدامها في اختيار تماثل الشكل الموجي .

وبما أن موجة الشكل ١٥ - ١٥ فردية فإن متسلسلتها تحتوي على حدود جيبية فقط وبما أن لها أيضاً تماثل موجي لئليها  
تحتوي على ترددات فردية فقط .

١٥ - ٧ أوجد متسلسلة فوريير ذات اللب المكثفة للموجة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥ - ١٧ . وادرس طيفها الخطي .



شكل ١٥ - ١٨



شكل ١٥ - ١٧

الموجة دالة زوجية لأن  $f(t) = f(-t)$  ، وإذا أخذنا القيمة المتوسطة  $V/2$  فإنه يكون لها أيضاً تماثل نصف موجي ، أي أن  $f(t) = -f(t + T/2)$  . وفي الفترة  $-\pi < \omega t < 0$  فإن  $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$  . وفي الفترة  $0 < \omega t < \pi$  فإن  $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$  . وبما أن الشكل الموجي الزوجي يحتوي على حدود جيب تمام فقط فإن  $b_n = 0$  لجميع قيم  $n$  الصحيحة .

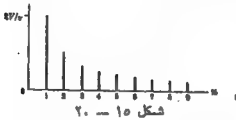
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 \cos n\omega t d(\omega t) + \int_{-\pi}^0 \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) - \int_0^{\pi} \frac{\omega t}{\pi} \cos n\omega t d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{1}{n} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_{-\pi}^0 - \left[ \frac{1}{n} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0) = \frac{2V}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

وكما نتوقع من التآثل النصف . موجي فإن المتسلسلة تحتوي فقط على حدود فردية حيث  $a_n = 0$  عندما  $n = 2, 4, 6, \dots$  . وعندما  $n = 1, 3, 5, \dots$  فإن  $a_n = 4V/\pi^2 n^2$  . إذن متسلسلة فورييه المطلوبة هي

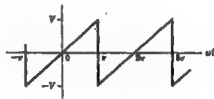
$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{4V}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{4V}{(3\pi)^2} \cos 3\omega t + \frac{4V}{(5\pi)^2} \cos 5\omega t + \dots$$

ونقل المعاملات بمعدل  $1/n^2$  ، وعلى هذا فإن تقارب المتسلسلة أسرع من تلك التي في المسألة ١٥ - ١ . وتظهر هذه الحقيقة من التآثل اعطى الموضح في الشكل ١٥ - ٨ .

٣ - أوجد متسلسلة فورييه ذات السبب المثلثية لموجة من المثلثار الموضوعة في الشكل ١٥ - ١٩ وارسم عليها .



شكل ١٥ - ١٩



شكل ١٥ - ١٩

بالفحص للاطلاع أن القيمة المتوسطة للموجة تساوي صفراً وأن الموجة فردية . وبالتالي فإن المتسلسلة تحتوي فقط على حدود جيبية . ويصف التعبير  $f(t) = (V/\pi)\omega t$  الموجة في الدورة من  $-\pi$  إلى  $\pi$  + وسوف نستعمل هذه الحدود في حساب قيمة التكامل للحصول على  $b_n$  .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2V}{\pi^2 n} (\cos n\pi)$$

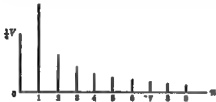
وحيث أن قيم  $\cos n\pi$  موجبة لقيم  $n$  الزوجية وسالبة لقيم  $n$  الفردية فإن إشارات المعاملات تكون متناوبة . والمتسلسلة المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$$

وتتناقص الحدود بمعدل  $1/n$  وحل ذلك فالتسلسلة تتقارب ببطء ككاهو موضح بالليف في الشكل ١٥ - ٢٠ . وباستثناء إزاحة نقطة أصل المحاور وأخذ المتوسط فإن هذا الشكل الموجي هو نفسه الموجود في المثال (١) . قارن الليف الخلفي في الشكل ١٥ - ٩ بما في الشكل ١٥ - ٢٠ ولا حظ التشابه الموجود .

١٥ - ٩ أوجد متسلسلة فورييه ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥ - ٢١ وارسم الليف .

في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  نجد أن  $f(t) = (V/\pi)\omega t$  وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$  نجد أن  $f(t) = 0$  . وبالفحص نجد أن القيمة المتوسطة للموجة هي  $V/4$  . وبما أن الموجة لا هي زوجية ولا فردية فالتسلسلة يجب أن تحتوي على حدود جيبية وحدود جيب تامة معاً . وفي الفترة من  $0$  إلى  $\pi$  نحصل على



شكل ١٥ - ٢٢



شكل ١٥ - ٢١

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \cos n\omega t + \frac{\omega t}{n} \sin n\omega t \right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

عندما  $n$  زوجية فإن  $(\cos n\pi - 1) = 0$  و  $a_n = 0$  . وعندما  $n$  فردية فإن  $a_n = -2V/(\pi^2 n^2)$  وبمايلات  $b_n$  هي

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (V/\pi)\omega t \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n^2} \sin n\omega t - \frac{\omega t}{n} \cos n\omega t \right]_0^{\pi} = -\frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi)$$

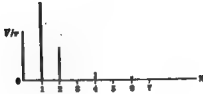
وتتناوب الإشارات حيث  $b_n = -V/\pi n$  لنقيم  $n$  الزوجية و  $b_n = +V/\pi n$  لنقيم  $n$  الفردية ومتسلسلة فورييه المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{V}{4} - \frac{2V}{\pi^2} \cos \omega t - \frac{2V}{(8\pi^2)} \cos 3\omega t - \frac{2V}{(64\pi^2)} \cos 5\omega t - \dots$$

$$+ \frac{V}{\pi^2} \sin \omega t - \frac{V}{2\pi^2} \sin 3\omega t + \frac{V}{6\pi^2} \sin 5\omega t - \dots$$

ونلاحظ أن الترددات الزوجية مباشرة بمعاملات  $b_n$  ، وذلك لعدم وجود حدود جيب تامة زوجية . وحل ذلك فإنه يجب استخدام  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  لحساب معاملات الترددات الفردية . إذن  $c_1 = \sqrt{(2V/\pi^2)^2 + (V/\pi)^2}$  وبالمثل  $c_3 = V(0.109)$  و  $c_5 = V(0.064)$  . ويوضح الشكل ١٥ - ٢٢ الليف الخلفي .

١٥ - ٩ أوجد متسلسلة فورييه ذات النسب المثلثية لدالة الجيبية المقومة تقوياً نصف موجياً والموضحة في الشكل ١٥ - ٢٣ وارسم الليف .



شكل ١٥ - ٢٤



شكل ١٥ - ٢٣

لا تبين الموجة أي تماثل ولذلك فإننا نتوقع أن تحتوي المتسلسلة على حدود جيوبية وجيبية متمايزة مما . بما أنه لا يمكن الحصول على القيمة المتوسطة بالاحص فإننا نحسب  $a_0$  لحد  $a_0/2$  في المتسلسلة

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} [-\cos \omega t]_0^\pi = \frac{2V}{\pi}$$

ثم نعين بعد ذلك  $a_n$  :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos n\omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{V}{\pi} \left[ \frac{-n \sin \omega t \sin n\omega t - \cos \omega t \cos n\omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

عندما  $n$  زوجية فإن:  $(\cos n\pi = 1)$  ، وعندما  $n$  فردية فإن  $a_n = 0$  ، وحيث أن هذا التعبير غير محدد عندما  $n = 1$  ، إذن فإننا يجب أن تكامل على حدة الحصول على  $a_1$  .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2\omega t \, d(\omega t) = 0$$

والآن نحسب  $b_n$  :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin \omega t \sin n\omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[ \frac{n \sin \omega t \cos n\omega t - \sin \omega t \cos \omega t}{-n^2 + 1} \right]_0^\pi = 0$$

ولقد هنا أيضاً أن هذا التعبير غير محدد عندما  $n = 1$  وعلى ذلك فإن  $b_1$  نحسب على حدة .

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V \sin^2 \omega t \, d(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \right]_0^\pi = \frac{V}{2}$$

ومتسلسلة فوريير المطلوبة هي

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 3\omega t - \frac{2}{15} \cos 5\omega t - \frac{2}{35} \cos 7\omega t - \dots \right\}$$

والطيف في الشكل ١٥ - ٢٤ يبين الحد الأساسي القوي في المتسلسلة وكذلك صلات الترددات الأعلى التي تتناقص سريعاً .

٢١٥- أوجد متسلسلة فورييه ذات النصف المثلثية للموجة الجيبية

المعطية تقويماً نصف موجي والموضحة في الشكل

٢١٥-٢٠ : حيث أضح المحور الرأسى عن موضعه

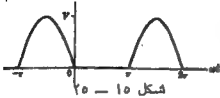
في المسألة ١٥-٥ .

المعطاة معرفة في الفترة  $-\pi < \omega t < 0$  بالعلامة

المعطاة معرفة في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  بالعلامة  $-V \sin \omega t$  .

في المسألة ١٥-٥ : أى أن  $\omega_0 = 2\pi/\pi$  ولدينا

للمعاملات  $a_n$  .



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-V \sin \omega t) \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{V}{\pi(1-n^2)}(1 + \cos n\pi)$$

وعندما  $n$  زوجية فإن  $a_n = 2V/\pi(1-n^2)$  وعندما  $n$  فردية فإن  $a_n = 0$  . فبما هذا  $n = 1$  حيث يجب اعتبارها على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-V \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

ولدينا للمعاملات  $b_n$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-V \sin \omega t) \sin n\omega t d(\omega t) = 0$$

ولكن مرة أخرى نجد أن هذا التصور غير محدد عندما  $n = 1$  ، وعلى هذا فإننا نحسب  $b_1$  على حدة

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-V) \sin^2 \omega t d(\omega t) = -\frac{V}{2}$$

إذن المتسلسلة هي

$$f(\omega t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right\}$$

وهذه المتسلسلة متطابقة مع متسلسلة المسألة ١٥-٥ : فبما هذا الحد الأساسى الذى له إشارة سالبة في هذه المتسلسلة .

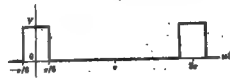
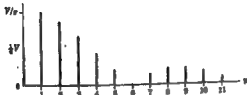
ومن الواضح أن الطيف مطابق لما في الشكل ٢١٥-٢٤ .

٢١٥-٧ : أوجد متسلسلة فورييه المثلثية للنهضة المستطيلة الموضحة في الشكل ٢١٥-٢٦ وارسم الطيف .

بوضع نقطة أصل المحاور كما في الشكل تكون الموجة زوجية . وبذلك فإن المتسلسلة تتخوى على حدود جيب تامة

فقط بالإضافة إلى حد ثابت . ونستخدم الفترة من  $-\pi$  إلى  $+\pi$  في حساب قيم التكاملات وقيمة الدالة تساوى

صفرًا فيما عدا في الفترة من  $-\pi/6$  إلى  $+\pi/6$  .



شكل ١٥ - ٢٧

شكل ١٥ - ٢٦



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V d(u) = \frac{V}{\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} V \cos nu d(u) = \frac{2V}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{6}$$

بما أن  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$  عندما  $\sin n\pi/6 = 1/2, \sqrt{3}/2, 1, \sqrt{3}/2, 1/2, 0, -1/2, \dots$  فإن التسلسلة هي

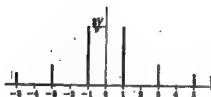
$$f(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{2V}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos u + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \cos 2u + 1 \left( \frac{1}{2} \right) \cos 3u + \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{4} \right) \cos 4u + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \cos 5u - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \cos 7u - \dots \right\}$$

$$f(t) = \frac{V}{\pi} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi/6) \cos nu \quad \text{أو}$$

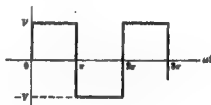
والطيف الخطي المرفوع في الشكل ٢٧-١ يتناقص ببطء جدا لهذه الموجة ، حيث أن التسلسلة تتقارب ببطء جدا إلى الدالة . من الأشياء التي لها أهمية خاص حقيقة أن سمات الترددات الثامن والتاسع والمضي زاد من سمات التردد السابع . ونجد الموجات البسيطة السابق اعتبارها أن سمات الترددات التالية لتتناقص باستمرار .

١-٨ أوجد متسلسلة فوريير للأسية الموجية المربعة المرفوعة في الشكل ١-٢٨ . وارسم طيفها الخطي .

أوجد معاملات التسلسلة المثلثية وقارنها بالمتسلسلة ١-١٠ .



شكل ١٥ - ٢٦



شكل ١٥ - ٢٨

في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  نجد أن  $f(t) = -V$  وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$  نجد أن  $f(t) = V$  والقيمة المتوسطة الموجبة تساوي صفرا . والموجة فردية ، إذن المعاملات  $A_n$  تؤولية تماما .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-V) e^{-jnt} d(\omega t) + \int_0^{\pi} V e^{-jnt} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi} \left\{ - \left[ \frac{1}{(-jn)} e^{-jnt} \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{1}{(-jn)} e^{-jnt} \right]_0^{\pi} \right\} \\ &= \frac{V}{(-jn\pi)} (-e^0 + e^{-jn\pi} + e^{-jn\pi} - e^0) = j \frac{V}{n\pi} (e^{jn\pi} - 1) \end{aligned}$$

عندما  $n$  زوجية نجد  $e^{jn\pi} = +1$  و  $A_n = 0$  ، وعندما  $n$  فردية نجد أن  $e^{jn\pi} = -1$  و  $A_n = -j(2V/n\pi)$  ومتسلسلة فوريير المطلوبة هي

$$f(t) = \dots + j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} + j \frac{2V}{5\pi} e^{-j5\omega t} - j \frac{2V}{\pi} e^{-j\omega t} - j \frac{2V}{3\pi} e^{-j3\omega t} - \dots$$

ويوضح الطيف في الشكل ١٥-٢٩ سمات لطيفات موجية وسالبة معا . ويجمع القيم عند  $n$  و  $-n$  ينتج السمة المرسومة للمتسلسلة ذات النصب المثلثية في الشكل ١٥-١٦ .

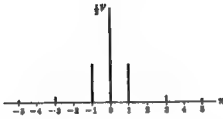
معاملات الجيب تمام في المتسلسلة المثلثية هي

$$a_n = A_n + A_{-n} = -j \frac{2V}{n\pi} + \left( -j \frac{2V}{(-n)\pi} \right) = 0$$

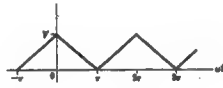
$$b_n = f[A_n - A_{-n}] = f \left[ -j \frac{2V}{n\pi} + j \frac{2V}{(-n)\pi} \right] = \frac{4V}{n\pi}$$

وهذا يتفق مع معاملات المتسلسلة المثلثية التي حصلنا عليها في المسألة ١٥-١٠ .

١٥-٩ أوجد متسلسلة فوريير الأسية الموجبة المثلثية الموضحة في الشكل ١٥-٣٠ وارسم الطيف .



شكل ١٥-٣١



شكل ١٥-٣٠

بعد في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  أن  $f(t) = V + (V/\pi)\omega t$  وفي الفترة  $\pi < \omega t < 2\pi$  أن  $f(t) = V - (V/\pi)\omega t$  والموجة زوجية وعلى ذلك فإن معاملات  $A_n$  حقيقية تماماً . وقيمة المتوسطة بالاحص هي  $V/2$  .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [V + (V/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} [V - (V/\pi)\omega t] e^{-j n \omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \int_{-\pi}^0 \omega t e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_0^{\pi} (-\omega t) e^{-j n \omega t} d(\omega t) + \int_{-\pi}^{\pi} V e^{-j n \omega t} d(\omega t) \right\} \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left\{ \left[ \frac{e^{-j n \omega t}}{(-j n)^2} (-j n \omega t - 1) \right]_{-\pi}^0 - \left[ \frac{e^{-j n \omega t}}{(-j n)^2} (-j n \omega t - 1) \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{V}{\pi^2 n^2} [1 - e^{j n \pi}] \end{aligned}$$

ونجد قيم  $n$  الزوجية أن  $A_n = 0$  ولقيم  $n$  الفردية أن  $A_n = 2V/\pi^2 n^2$  . إذن للمتسلسلة هي

$$f(t) = \dots + \frac{2V}{(-\pi)^2} e^{-j n \omega t} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{-j n \omega t} + \frac{V}{2} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j n \omega t} + \frac{2V}{(\pi)^2} e^{j n \omega t} + \dots$$

والطيف موضح في الشكل ١٥-٣١ يطين عند  $-n$  و  $n$  وعند إضافتهما نحصل على نفس السمة في طيف الشكل ١٥-٣١ .

ومعاملات المتسلسلة المثلثية هي ولقيم  $n$  الفردية فقط .

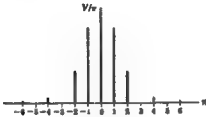
$$a_n = A_n + A_{-n} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} + \frac{2V}{\pi^2 (-n)^2} = \frac{4V}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = f[A_n - A_{-n}] = f \left[ \frac{2V}{\pi^2 n^2} - \frac{2V}{\pi^2 (-n)^2} \right] = 0$$

وهذه المعاملات تتفق مع نتيجة المسألة ١٥-٧ .

١٥-١٠ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة الجيبية المقومة تقريبا بنصف موجي والموضحة في الشكل ١٥-٣٢ .

نجد في الفترة  $0 < \omega t < \pi$  أن  $f(t) = V \sin \omega t$  ونجد في الفترة من  $\pi$  إلى  $2\pi$  أن  $f(t) = 0$  . إذن



شكل ١٥ - ٣٣



شكل ١٥ - ٣٢

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \sin \omega t e^{-jn\omega t} d(\omega t) \\ &= \frac{V}{2\pi} \left[ \frac{e^{-jn\omega t}}{(1-n^2)} (-jn \sin \omega t - \cos \omega t) \right]_0^{2\pi} = \frac{V}{2\pi(1-n^2)} (e^{-jn\omega t} + 1) \end{aligned}$$

ونجد لقيم الزوجية أن  $A_n = V/\pi(1-n^2)$  ولقيم الفردية أن  $A_n = -1$  و  $e^{-jn\omega t} = 1$  . وعلى ذلك نستنتج أن  $n = \pm 1$  فإن تعبير  $A_n$  يصبح غير محدد . يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ، أي أننا لنفاضل بسط ومقام الكسرة

$$A_1 = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{V}{2\pi(1-n^2)} (e^{-jn\omega t} + 1) \quad \text{كل على حدة بالنسبة إلى } n \text{ ثم نجعل } n \text{ تقترب من } 1 \text{ فينتج أن } A_1 = (V/4)$$

$$A_{-1} = -(V/4) \quad \text{و}$$

والقيمة المتوسطة هي

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \sin \omega t d(\omega t) = \frac{V}{2\pi} [-\cos \omega t]_0^{2\pi} = \frac{V}{\pi}$$

إذن متسلسلة فوريير الأسية هي

$$f(t) = \dots - \frac{V}{16\pi} e^{-j4\omega t} - \frac{V}{8\pi} e^{-j2\omega t} + j\frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + j\frac{V}{4} e^{j\omega t} - \frac{V}{8\pi} e^{j2\omega t} - \frac{V}{16\pi} e^{j4\omega t} - \dots$$

من المهم ملاحظة أنه يوجد معاملان تخيلان فقط في المتسلسلة عند  $n = \pm 1$  وأن الحد الجبري الوحيد في المتسلسلة الخالية في السلسلة ١٥-٦ له معامل  $j/4$  .  $f(t) = (V/4)$  .  $A_1 = j/4$  .  $A_{-1} = -j/4$  .

ويوضح الطيف الخطي في الشكل ١٥-٣٣ السمات الترددية للموجة وهنا يجب مقارنتها بالشكل ١٥-٣٤ .

١١-١٥ أوجد القدرة المتوسطة في المقاومة  $R = 10 \Omega$  علماً بأن التيار هو

$$i = 10 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t + 2 \sin 5\omega t \text{ amperes.}$$

القيمة الفعالة للتيار هي  $I = \sqrt{\frac{1}{2}[(10)^2 + (5)^2 + (2)^2]} = \sqrt{64.5} = 8.03 \text{ A}$  . إذن القدرة المتوسطة هي

$$P = PR = (64.5)10 = 645 \text{ W}$$

## طريقة اخرى :

القدرة الكلية هي مجموع قدرات الترددات المختلفة وتطلى بالمعادلة  $V_{rms} I_{rms} \cos \theta$  . ولكن زاوية الطور بين الجهد عبر المقاومة والتيار هي  $\theta_R = 0$  وذلك لكل الترددات . إذن

$$V_R - RI = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t \text{ volts}$$

$$P = \frac{1}{2}(10)(100) + \frac{1}{2}(5)(50) + \frac{1}{2}(2)(20) = 645 \text{ W.}$$

١٥-١٧ أوجد القدرة المتوسطة الممتصة لشبكة كهربائية علما بأن الجهد والتيار الناتج يعطيان بالمعادلتين .

$$v = 50 + 50 \sin 5 \times 10^4 t + 30 \sin 10^4 t + 20 \sin 2 \times 10^4 t \text{ volts}$$

$$i = 11.2 \sin(5 \times 10^4 t + 63.4^\circ) + 10.6 \sin(10^4 t + 45^\circ) + 8.97 \sin(2 \times 10^4 t + 26.6^\circ) \text{ amperes}$$

متوسط القدرة الكلية هي مجموع القدرة الناتجة عن كل تردد .

$$P = \frac{1}{2}(30)(11.2) \cos 63.4^\circ + \frac{1}{2}(30)(10.6) \cos 45^\circ + \frac{1}{2}(20)(8.97) \cos 26.6^\circ = 317.7 \text{ W}$$

١٥-١٧ أوجد ثابت دائرة التوالى المكونة من عنصرين علما بأن الجهد المؤثر والتيار الناتج هما لهما المعطيان في المسألة ١٥-٧ .

نجد في سلسلة الجهد حدا لثابتا مقداره 50 ولكن لا يتأمله حد في متسلسلة التيار ، وهذا يعنى أن أحد العنصرين مكثف . وبما أنه توجد لدارة متسلسلة الدائرة فإن العنصر الآخر يجب أن يكون مقاومة .

$$I = \sqrt{\frac{1}{2}[(11.2)^2 + \frac{1}{2}(10.6)^2 + \frac{1}{2}(8.97)^2]} = 12.6 \text{ A}$$

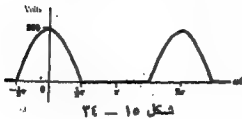
$$R = P/I^2 = 317.7/159.2 = 2 \text{ ohms} \text{ ومنها } P = I^2 R$$

عنصر  $\omega = 5 \times 10^4 \text{ rad/sec}$  نجد أن  $|Z| = V_{rms}/I_{rms} = 50/11.2 = 4.47 \Omega$  . وبما أن

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad X_C = \sqrt{(4.47)^2 - 2^2} = 4 \Omega$$

$$C = 1/(\omega X_C) = 1/(4 \times 5 \times 10^4) = 50 \mu F \quad \text{و } X_C = 1/(\omega C)$$

وعلى هذا فإن دائرة التيار تتكون من عنصرين أحدهما مقاومة قيمتها  $2 \Omega$  والاخر مكثف سعته  $50 \mu F$  .



شكل ١٥ - ٢٤

١٥-١٤ اقترح موجة الجهد الموصوفة في الشكل ١٥-٢٤ حل

دائرة توالى تتكون من  $R=2000 \Omega$  و  $X_L=10 \text{ H}$  .

استخدم متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية لتحصل

على الجهد عبر المقاومة . اوسم القطب الخطى للجهد

المؤثر  $V_R$  لتبين تأثير الحش على الترددات .

$$\omega = 377 \text{ rad/sec}$$

القيمة المتوسطة لجهد الزئبق هي  $V_{max}/\pi$  ، كما في المسألة ١٥-٤ . والدالة الموجية زوجية وحل ذلك فالتسلسلة تحتوي فقط على حدود يجب تمام بمعاملات يمكن الحصول عليها بحساب التكامل التالي .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cos n\pi/2$$

$\cos n\pi/2$  له قيمة 1 — عندما  $n = 2, 6, 10, \dots$  و  $n + 1$  عندما  $n = 4, 8, 12, \dots$  وعندما يكون  $n$  فردية فإن  $\cos n\pi/2 = 0$  . وحل هذا فنستنتج  $n = 1$  يكون التعبير السابق غير محدد ويجب حساب قيمته على حدة .

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300 \cos \omega t d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \left[ \frac{\sin \omega t}{1} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{\pi}$$

وحل هذا فالتسلسلة المجهدة تكون على الشكل

$$v = \frac{300}{\pi} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t + \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right\} \text{ volts}$$

n	$\cos n\omega t$	R	$\cos nL$	Z	$\theta$
0	0	2 k	0	2 k	0°
1	377	2 k	3.77 k	4.26 k	62°
2	754	2 k	7.54 k	7.78 k	75.1°
4	1508	2 k	15.08 k	15.2 k	82.45°
6	2262	2 k	22.62 k	22.6 k	84.92°

المناورة الكلية للمائرة المتصلة على التوالي هي  $Z = R + j\omega L$  . وتبس عند كل تردد في معادلة الجهد . ويوضح الجدول المرفق النتائج المحسوبة .

تتجوز متسلسلة التيار على حدود لها معاملات تساوي المعاملات الموجبة في متسلسلة الجهد مقسومة على  $Z$  وحدود التيار المناظرة للاحقة بزاوية مقدارها  $\theta$  .

$$n = 0, I_0 = \frac{300/\pi}{2 k} \text{ amperes;}$$

$$n = 1, I_1 = \frac{300/2}{4.26 k} \cos (\omega t - 62^\circ) \text{ amperes;}$$

$$n = 2, I_2 = \frac{600/3\pi}{7.78 k} \cos (2\omega t - 75.1^\circ) \text{ amperes; etc.}$$

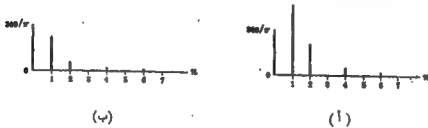
إذن متسلسلة التيار هي

$$i = \frac{300}{2 k \pi} + \frac{300}{(2)4.26 k} \cos (\omega t - 62^\circ) + \frac{600}{3\pi(7.78 k)} \cos (2\omega t - 75.1^\circ) - \frac{600}{15\pi(15.2 k)} \cos (4\omega t - 82.45^\circ) + \frac{600}{35\pi(22.6 k)} \cos (6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ amperes}$$

والجهد عبر المقاومة 2 k هو  $i(2 k)$  أو

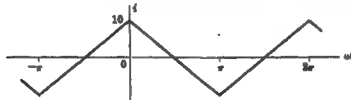
$$v_R = 95.5 + 70.4 \cos (\omega t - 62^\circ) + 16.4 \cos (2\omega t - 75.1^\circ) - 1.67 \cos (4\omega t - 82.45^\circ) + 0.483 \cos (6\omega t - 84.92^\circ) - \dots \text{ volts}$$

ولرى بوضوح من الشكل ٣٥-١٥ كيف أن السعة الترددية لطيف الجهد المأخوذ  $v_R$  قد قلت بفعل الحث  $10\text{ H}$  المتصل على التوالي .



شكل ١٥ - ٣٥

١٥-١٥ إذا كان التيار المار في الحث  $L = 0.01\text{ H}$  له شكل موجي معطى في الشكل ٣٦-١٥ فأوجد المتسلسلة ذات النسب المتتالية لجهد  $v_L$  والجهد عبر الحث  $\omega = 500\text{ rad/sec}$



شكل ١٥ - ٣٦

التيمة المتوسطة لتيار تساوى صفراً والشكل الموجي زوجي . وعلى هذا فإن المتسلسلة تحتوي فقط على حدود جيب تمام . ولحد في الفترة  $-\pi < \omega t < 0$  أن  $i = 10 + (20/\pi)\omega t$  وفي الفترة  $0 < \omega t < \pi$  أن  $i = 10 - (20/\pi)\omega t$  .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 [10 + (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) + \int_0^{\pi} [10 - (20/\pi)\omega t] \cos n\omega t d(\omega t) \right\}$$

$$= \frac{40}{\pi^2 n^2} (1 - \cos n\pi) = \frac{80}{\pi^2 n^2}$$

وذلك لقيم  $n$  الفردية فقط .

إذاً متسلسلة التيار هي

$$i = \frac{80}{\pi^2} \left\{ \cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \frac{1}{49} \cos 7\omega t + \dots \right\}$$

والجهد عبر الحث هو

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 0.01 \left( \frac{80}{\pi^2} \right) \frac{d}{dt} (\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots)$$

$$= \frac{400}{\pi^2} (-\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t - \dots) \text{ volts}$$

ويمكن الحصول على الشكل الموجي بالترتيب ، ولكن هذه التسلسلة تختلف عن مثيلتها في السألة ١٥ - ١٠ بإشارة سالبة . وعلى هذا فإن  $v_2$  موجة مربعة ، وسألب الشكل الموجي معطى في الشكل ١٥ - ١٥ .

### مسألة تسلسلية

١٦ - ١٥ ركب الشكل الموجي لتسلسلة فوريير المثالية .

$$f(t) = \frac{8V}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$$

١٧ - ١٥ ركب الشكل الموجي لتسلسلة فوريير .

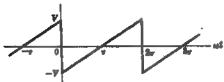
$$f(t) = 8 - \frac{40}{\pi^2} (\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots) \\ + \frac{30}{\pi^2} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$$

١٨ - ١٥ ركب الشكل الموجي لتسلسلة فوريير المثالية .

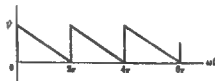
$$f(t) = V \left\{ \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \cos \omega t - \frac{1}{3\pi} \cos 3\omega t + \frac{1}{2\pi} \cos 5\omega t - \frac{1}{16\pi} \cos 7\omega t - \frac{1}{6\pi} \cos 9\omega t \right. \\ \left. + \dots + \frac{1}{4} \sin \omega t - \frac{8}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4}{18\pi} \sin 5\omega t - \dots \right\}$$

١٩ - ١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثالية لموجة من المنشار الموضحة في الشكل ١٥ - ٣٧ وارسم الطيف الخلفي .  
قارن بالمثال ( ١ ) .

$$f(t) = \frac{V}{2} + \frac{V}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots)$$



شكل ١٥ - ٢٨



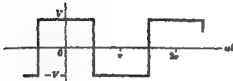
شكل ١٥ - ٣٧

٢٠ - ١٥ أوجد متسلسلة فوريير المثالية لموجة من المنشار الموضحة في الشكل ١٥ - ٢٨ وارسم الطيف ، قارن بنتيجة المسألة ٣ - ١٥ .

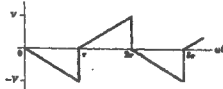
$$f(t) = \frac{-8V}{\pi^2} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$$

٢٩-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النيب المثلثية للشكل الموجب الموضح في الشكل ٢٩-١٥ وارسم الطيف الخطي .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi^2} (\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots) \\ - \frac{2V}{\pi} (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots)$$



شكل ١٥ - ٢٩



شكل ١٥ - ٢٩

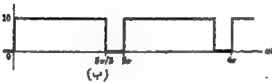
٢٧-١٥ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية الموجة المربعة الموضحة في الشكل ٢٧-١٥ وارسم الطيف الخطي . قارن بنتيجة المسألة ١٥-١٠ .

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} (\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots)$$

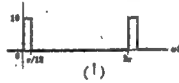
٢٣-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النيب المثلثية للشكل الموجب الموضح في الشكل ٢٣-١٥ (أ)، (ب) . ارسم طيف كل منهما مع المقارنة .

$$f_1(t) = \frac{5}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{10}{n\pi} \left( \sin \frac{n\pi}{18} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n\pi}{18} \right) \sin n\omega t \right)$$

$$f_2(t) = \frac{50}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{10}{n\pi} \left( \sin \frac{n5\pi}{9} \right) \cos n\omega t + \frac{10}{n\pi} \left( 1 - \cos \frac{n5\pi}{9} \right) \sin n\omega t \right)$$



(ب)



(أ)

شكل ١٥ - ٢٣

٢٤-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النيب المثلثية الموجة الجيبية المقومة نصف لدور والموضحة في الشكل ٢٤-١٥ وارسم طيف الخطي . قارن الإجابة بنتائج المسائلين ١٥-١٠ ، ١٥-٦ .

$$f(t) = \frac{V}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{3}{8} \cos 2\omega t - \frac{5}{16} \cos 4\omega t + \frac{3}{32} \cos 6\omega t - \dots \right\}$$



شكل ١٥ - ٢٤



شكل ١٥ - ٢٤

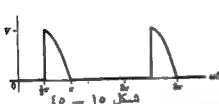


٢٥-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للموجة المربعة تقريبا كاملا والموضحة في الشكل ٢٥-١٥ وارسم الطيف .

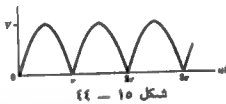
الجواب : 
$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$

٢٦-١٥ الشكل الموجي الموضح في الشكل ٢٦-١٥ مشابه لما في المسألة ٢٥-١٥ ولكن مع تغيير في موضع نقطة الأصل . أوجد متسلسلة فوريير وقارن بين النتائج .

الجواب : 
$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$$



شكل ١٥-٢٥



شكل ١٥-٢٦

٢٧-١٥ أوجد متسلسلة فوريير ذات النسب المثلثية للشكل الموجي الموضحة في الشكل ٢٧-١٥ .

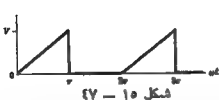
الجواب : 
$$f(t) = \frac{V}{2\pi} - \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V}{\pi(1-n^2)} (\cos n\omega t + n \sin n\omega/2) \cos n\omega t$$
  

$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{-nV \cos n\omega/2}{\pi(1-n^2)} \right] \sin n\omega t$$

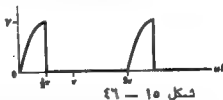
٢٨-١٥ أوجد متسلسلة فوريير المثلثية للشكل الموجي الموضح في الشكل ٢٨-١٥ . أضف هذه المتسلسلة لمتسلسلة المسألة ٢٧-١٥ ثم قارن المجموع بالمتسلسلة التي حصلنا عليها في المسألة ٢٥-١٥ .

الجواب : 
$$f(t) = \frac{V}{2\pi} + \frac{V}{2\pi} \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V(n \sin n\omega/2 - 1)}{\pi(n^2 - 1)} \cos n\omega t$$
  

$$+ \frac{V}{4} \sin \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Vn \cos n\omega/2}{\pi(1-n^2)} \sin n\omega t$$



شكل ١٥-٢٧



شكل ١٥-٢٨

٢٩-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ٢٩-١٥ . وارسم الطيف الخطي . حول الحسابات التي حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ٢٥-١٥ .

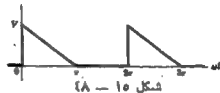
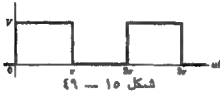
الجواب : 
$$f(t) = V \left\{ \dots - \left( \frac{1}{8\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{-j2\omega t} - j\frac{1}{4\pi} e^{-j\omega t} - \left( \frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{-j\omega t} + \frac{1}{4} \right.$$
  

$$\left. - \left( \frac{1}{\pi^2} + j\frac{1}{2\pi} \right) e^{j\omega t} + j\frac{1}{4\pi} e^{j\omega t} - \left( \frac{1}{8\pi^2} + j\frac{1}{6\pi} \right) e^{j2\omega t} - \dots \right\}$$

٣٥-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٨ وارسم الطيف الخطي .

الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + \left( \frac{1}{8\pi} + j \frac{1}{6\pi} \right) e^{-j2\pi t} + j \frac{1}{4\pi} e^{-j4\pi t} + \left( \frac{1}{2\pi} + j \frac{1}{2\pi} \right) e^{-j6\pi t} + \frac{1}{4} \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi} - j \frac{1}{2\pi} \right) e^{j2\pi t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j4\pi t} + \left( \frac{1}{8\pi} - j \frac{1}{6\pi} \right) e^{j6\pi t} + \dots \right\}$$

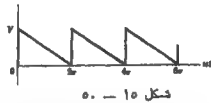
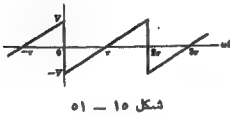


٣٦-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٤٩ وارسم الطيف الخطي . أمف متسلسلتي المسائلين ٢٩-١٥ ، ٣٠-١٥ إلى بعضهما وقارن المجموع بالمتسلسلة التي حصلت عليها هنا .

$$f(t) = V \left\{ \dots + j \frac{1}{8\pi} e^{-j2\pi t} + j \frac{1}{4\pi} e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{4\pi} e^{j2\pi t} - j \frac{1}{8\pi} e^{j4\pi t} - \dots \right\}$$

٣٧-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية لشكل من المنشار الموجي والموضح في الشكل ١٥-٥٠ وارسم الطيف . حول المعاملات التي حصلت عليها هنا إلى معاملات متسلسلة ذات نسب متكافئة ، ثم اكتب المتسلسلة المكافئة وقارن النتيجة بالنتيجة التي حصلنا عليها في المسألة ١٥-١٩ .

$$f(t) = V \left\{ \dots + j \frac{1}{4\pi} e^{-j2\pi t} + j \frac{1}{2\pi} e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\pi} e^{j2\pi t} - j \frac{1}{4\pi} e^{j4\pi t} - \dots \right\}$$



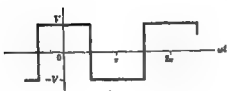
٣٨-١٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٥١ . وارسم الطيف . حول معاملات المتسلسلة المكافئة التي حصلت عليها في المسألة ١٥-٣٠ إلى معاملات متسلسلة أسية ثم قارنها بمعاملات المتسلسلة التي حصلت عليها هنا .

$$f(t) = V \left\{ \dots - j \frac{1}{2\pi} e^{-j2\pi t} - j \frac{1}{\pi} e^{-j4\pi t} + j \frac{1}{\pi} e^{j2\pi t} + j \frac{1}{2\pi} e^{j4\pi t} + \dots \right\}$$

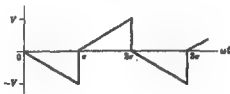
١٥- ٣٤ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٣٠. وارسم الطيف. حول المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بتلك التي حصلت عليها في المسألة ١٥-٢١.

الجواب :

$$f(t) = V \left\{ \dots + \left( \frac{2}{3\pi} - j\frac{1}{3\pi} \right) e^{-j\omega t} + \left( \frac{2}{\pi} - j\frac{1}{\pi} \right) e^{-j\omega t} + \left( \frac{2}{3\pi} + j\frac{1}{3\pi} \right) e^{j\omega t} + \left( \frac{2}{\pi} + j\frac{1}{\pi} \right) e^{j\omega t} + \dots \right\}$$



شكل ١٥ - ٣٠



شكل ١٥ - ٣٢

١٥- ٣٥ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة المربعة الموضحة في الشكل ١٥-٣٢. ثم ارسم الطيف الخطي. حول معاملات متسلسلة المسألة ١٥-٢٢ المثلثية إلى معاملات متسلسلة أسية وقارن بمعاملات النتيجة التي حصلت عليها هنا.

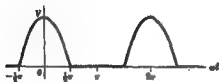
الجواب :

$$f(t) = \frac{2V}{\pi} \left( \dots + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} - \frac{1}{2} e^{-j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} - e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{j\omega t} - \dots \right)$$

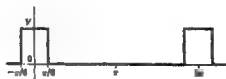
١٥- ٣٦ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للشكل الموجي الموضح في الشكل ١٥-٣٤ وارسم الطيف الخطي.

الجواب :

$$f(t) = \dots - \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{-2\pi}{6}\right) e^{-j\omega t} - \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) e^{-j\omega t} + \frac{V}{6} + \frac{V}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{j\omega t} + \frac{V}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) e^{j\omega t} + \dots$$



شكل ١٥ - ٣٦



شكل ١٥ - ٣٨

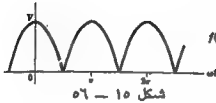
١٥- ٣٧ أوجد متسلسلة فوريير الأسية للموجة الجيبية المقومة نصف لثوم والموضحة في الشكل ١٥-٣٥. حول هذه المعاملات إلى معاملات متسلسلة مثلثية ، ثم اكتب المتسلسلة المثلثية وقارنها بنتيجة المسألة ١٥-٢٤.

الجواب :

$$f(t) = \dots - \frac{V}{16\pi} e^{-j\omega t} + \frac{V}{8\pi} e^{-j\omega t} + \frac{V}{4} e^{-j\omega t} + \frac{V}{\pi} + \frac{V}{4} e^{j\omega t} + \frac{V}{8\pi} e^{j\omega t} - \frac{V}{16\pi} e^{j\omega t} + \dots$$

٣٨-١٥ أوجد متسلسلة فورييه الأسية لموجة الجيبية المفعلة

نصف تقويم والموصلة في الشكل ١٥-٥٦ وأرسم الطيف المثلثي .



$$f(t) = \dots - \frac{2V}{18\pi} e^{-j4\omega t} + \frac{2V}{9\pi} e^{-j2\omega t} + \frac{2V}{\pi} + \frac{2V}{9\pi} e^{j2\omega t} - \frac{2V}{18\pi} e^{j4\omega t} + \dots$$

٣٩-١٥ أوجد القيمة الفعالة للجهد والتيمة الفعالة لتيار والقدرة المتوسطة لشبكة كهربية انخاملة جملها بأن الجهد المأثر  $v = 200 + 100 \cos(500t - 30^\circ) + 75 \cos(1500 - 60^\circ)$  volts و التيار الناتج هو

$$218.5 \text{ V}, 3.54 \text{ A}, 250.8 \text{ w} \quad \text{الجواب : } i = 3.53 \cos(500t + 75^\circ) + 3.35 \cos(1500 + 78.45^\circ) \text{ amperes.}$$

٤٠-١٥ إذا أثرنا بالجهد  $v = 50 + 25 \sin 500t + 10 \sin 1500t + 5 \sin 2500t$  volts بين طرفي شبكة كهربية خاملة وكان التيار الناتج هو

$$i = 5 + 2.23 \sin(500t - 26.6^\circ) + 0.566 \sin(1500t - 56.3^\circ) + 0.186 \sin(2500t - 68.2^\circ) \text{ amperes}$$

فأوجد التهمة الفعالة للجهد والقيمة الفعالة لتيار والقدرة المتوسطة .

$$53.6 \text{ V}, 5.25 \text{ A}, 276.5 \text{ w} \quad \text{الجواب :}$$

٤١-١٥ دائرة توالى تتكون من ثلاثة عناصر  $R = 5 \Omega$  و  $L = 5 \text{ mH}$  و  $C = 30 \mu\text{F}$  يؤثر عليها جهد

$$v = 150 \sin 1000t + 100 \sin 2000t + 75 \sin 3000t \text{ volts.}$$

أوجد القيمة الفعالة لتيار والقدرة المتوسطة في الدائرة . أرسم الطيف الخطي لكل من الجهد والتيار ثم لاحظ تأثير التردد على التوالى .

$$16.58 \text{ A}, 1374 \text{ w} \quad \text{الجواب :}$$

٤٢-١٥ دائرة توالى تتكون من عنصرين  $R = 10 \Omega$  و  $L = 0.02 \text{ H}$  يمر بها تيار  $i = 2 \sin 300t + 3 \sin 100t$

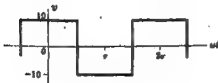
500v amperes. أوجد القيمة الفعالة للجهد المأثر والقدرة المتوسطة .

$$48 \text{ V}, 190 \text{ W} \quad \text{الجواب :}$$

٤٣-١٥ حث  $L$  قيمته  $0.01 \text{ H}$  تمر فيه موجة التيار الحثلية الموصفة في الشكل ١٥-٧ حيث  $\omega = 500 \text{ rad/s}$

أوجد متسلسلة فورييه الأسية لتيار ثم أوجد متسلسلة الجهد عبر الحث  $v_L$ . قارن الإجابة بنتيجة المسألة ١٥-٨ .

$$v_L = \frac{300}{\pi} (\dots - \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} - \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} + \frac{1}{3} e^{j3\omega t} + \frac{1}{5} e^{j5\omega t} - \dots) \text{ volts} \quad \text{الجواب :}$$



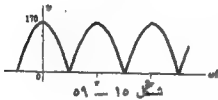
شكل ١٥-٨



شكل ١٥-٧

١٥ - ٤٤ : حيث نقي قيمته  $L = 0.01 \text{ H}$  يؤثر عليه جهد شكله الموجي موضح في الشكل ١٥-٥٨ حيث  $\omega = 200 \text{ rad/sec}$ . أوجد متسلسلة التيار المثلثة وحقق الشكل الموجي للتيار.

الجواب :  $i = \frac{20}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t - \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots)$  amperes



١٥ - ٤٥ : يوضح الشكل ١٥ - ٥٩ موجة جيبية مقدومة نصف تقويم وهي تغل الجهد الذي يؤثر بين طرفي الدائرة  $LC$ . القيمة المغطى الجهد هي  $170 \text{ V}$  و  $\omega = 377 \text{ rad/sec}$ . استخدم متسلسلة فورير لإيجاد الجهد عبر الحث والمكثف. ارسم الطيف الخطي لكل منهما.

١٥ - ٤٩ : دائرة تتكون من ثلاثة عناصر :  $R = 5 \Omega$  متصلة على التوالي مع مجموعة  $L$  و  $C$  متصلين على التوازي. عند  $\omega = 500 \text{ rad/sec}$  كانتا الممانتين المتناظرين هما  $20 \Omega$  و  $8 \Omega$ . أوجد التيار الكلي طياً بأن الجهد المؤثر يعطى بالمعادلة  $v = 30 \sin 500t + 10 \sin 1000t$  volts

الجواب :  $i = 10 \cdot 3.53 \sin (500t - 28.1^\circ)$  amperes

## الفصل السادس عشر

### الحالات العابرة للدوائر

#### مقدمة :

عندما تتحول دائرة كهربائية من حالة إلى حالة أخرى، بواسطة تغيير في الجهد المؤثر أو في أحد عناصر الدائرة ، فإنه توجد فترة تحول تتغير خلالها قيم تيارات الأفرع والمهبط في قيم الجهود من قيمها في الحالة الأولى إلى الحالة الجديدة . وبعد فترة التحول هذه والتي تسمى « فترة عابرة » فإنه يقال إن الدوائر في الحالة المستقرة .

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد على دائرة تحتوي على عناصر خازنة الطاقة معادلة تفاضلية تحل بإحدى الطرق المعهدة الممكنة. وهذا الحل يتكون من جزئين والدالة المتضمنة « وه الحل الخاص » . في معادلات تحليل الدوائر الكهربائية تتحول الدالة المتضمنة دائماً إلى الصفر سريعاً في فترة زمنية صغيرة نسبياً وهي تمثل « جزء » الانتقال « في الحل » . والحل الخاص هو استجابة الحالة المستقرة والتي كانت موضوع دراستنا في الفصول السابقة . وعموماً فإن طرق الحصول على الحل الخاص في هذا الفصل طويلة ومعقدة وغير مباشرة مثل الطرق المستخدمة سابقاً . ومع ذلك ، فإن خلال تطبيق هذه الطرق فإننا نحصل على المدى الذي يؤول لاستجابة الحالة المستقرة كجزء من الاستجابة الكلية .

### الحالات العابرة لتيار المستمر

#### دائرة RL في حالة عابرة :

يلتزم على دائرة RL المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٦-١ ، جهد ثابت  $V$  وذلك عند غلق المفتاح . وينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهد المعادلة التفاضلية التالية

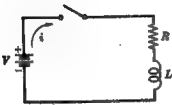
$$(1) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V$$

وبإعادة ترتيب الحدود واستخدام الترميز بالمؤثرات حيث  $D = d/dt$  فإن

$$(2) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V}{L}$$

المعادلة (٢) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى على الشكل

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + ay = Q \quad \text{or} \quad (D - a)y = Q$$



شكل ١٦ - ١

حيث  $D = d/dx$  و  $a$  ثابت و  $R$  ربما تكون حالة في  $x$  ولكن ليست حالة في  $y$  . ويتكون الحل الكامل للمعادلة (٢) من الثلاثة المتممة والحل الخاص ، أي أن

$$(٤) \quad y = y_p + y_h = ce^{ax} + e^{ax} \int e^{-ax} Q dx$$

حيث  $c$  ثابت اختياري يمين بمجرة الشروط الابتدائية . باستخدام (٤) يكون حل المعادلة (٢) هو

$$(٥) \quad i = ce^{-(R/L)t} + e^{-(R/L)t} \int e^{(R/L)t} \left( \frac{V}{L} \right) dt = ce^{-(R/L)t} + \frac{V}{R}$$

لتعين  $c$  ، نضع  $t = 0$  في المعادلة (٥) ونعوض بالتيار الابتدائي  $i_0$  بدلا من  $i$  . هذا التيار الابتدائي هو التيار المار

بمباشرة بعد غلق المفتاح . ويوجد لثلاث حالات بين الجهد والتيار هما  $v = L \frac{di}{dt}$  و  $i = \frac{1}{L} \int v dt$

والحالة الثانية تؤكد لنا أنه طالما يوجد جهد مؤثر فإن التيار المار في الحث يجب أن يكون حالة متصلة . وحيث أن التيار يساوي صفراً عندما  $t = 0$  فإنه يجب أيضاً أن يساوي صفراً عندما

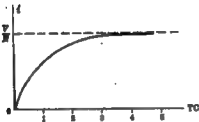
$t = 0 +$  . وبالتعويض في المعادلة (٥) نحصل حل

$$(٦) \quad c = -V/R \quad \text{أو} \quad i_0 = 0 = c(1) + V/R$$

وبالتعويض من قيمة  $c$  هذه في المعادلة (٥) ينتج أن

$$(٧) \quad i = -\frac{V}{R} e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R} = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

يعرف هذا النوع من المعادلات بالارتفاع الأسّي كما هو موضح في الشكل ١٦-٢ . يوضح الرسم الفترة العابرة التي يتغير خلالها التيار من قيمته الابتدائية المساوية للصفر إلى قيمته النهائية في الحالة المستقرة  $V/R$



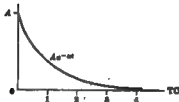
شكل ١٦ - ٢

ثابت الزمن  $TC$  لدائرة مثل التي في المعادلة (٧) هو الزمن الذي يكون عنده أس  $e$  مساوياً للوحدة . وعلى هذا فإن ثابت الزمن لدائرة  $RL$  في حالة عابرة هو  $TC = L/R$  seconds . عند  $1 TC$  فإن النسبة التي بين القوسين في المعادلة (٧) تأخذ القيمة  $0.632 = (1 - 0.368) = (1 - e^{-1})$  عند هذا الزمن يكون التيار مساوياً  $63.2\%$  من قيمته النهائية . وبالمثل عند  $2 TC$  فإن  $0.865 = (1 - 0.135) = (1 - e^{-2})$  ويكون التيار مساوياً  $86.5\%$  من قيمته النهائية . وبعد  $5 TC$  ينتهي تيار الفترة العابرة حتماً إلى الحالة النهائية ، والهجولة لأخذ ثابت الزمن كوحدة في رسم معادلة التيار (٧) .

كشال آخر يأخذ الاستحصال الأسّي الموضح في الشكل ١٦-٣ والممثل بالمعادلة

$$(٨) \quad f(t) = Ae^{-at}$$

وثابت الزمن هو أيضاً الزمن الذي يكون عنده أس  $e$  مساوياً



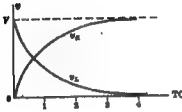
شكل ١٦ - ٣

الوحدة ، أى أن  $TC = 1/\alpha$  . عند  $TC = 1$  فإن  $\alpha = 0.368$   $\Rightarrow e^{-\alpha} = 0.368$  وتضمحل الطاقة إلى 36.8% من قيمتها الابتدائية  $A$  . وعند  $2TC$  فإن  $\alpha = 0.735$   $\Rightarrow e^{-\alpha} = 0.473$  وتعتبر الحالة العابرة حالة نهائية .  
نحصل على فروق الجهد العابرة على عنصرى دائرة  $RL$  من معادلة التيار . وعلى ذلك فالجهد عبر المقاومة هو :

$$(9) \quad v_R = Ri = V(1 - e^{-(R/L)t})$$

والجهد عبر الحث هو

$$(10) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left\{ \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \right\} = V e^{-(R/L)t}$$



إن الجهد العابر على المقاومة له ارتفاع أسى بنفس ثابت الزمن التيار بينما الجهد عبر الحث يمانى اخمضلا أسياً ولكن بنفس ثابت الزمن .  
والمجموع  $v_R$  و  $v_L$  يحقق قانون كيرشوف أثناء فترة العبور . انظر الشكل ١٦ - ١

شكل ١٦ - ١

$$(11) \quad v_R + v_L = V(1 - e^{-(R/L)t}) + V e^{-(R/L)t} = V$$

تسمى القدرة الحثية في أى عنصر في الدائرة بحاصل ضرب الجهد في التيار وعلى هذا فإن القدرة في المقاومة هي

$$(12) \quad p_R = v_R i = V(1 - e^{-(R/L)t}) \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R} (1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t})$$

والقدرة في الحث هي

$$(13) \quad p_L = v_L i = V e^{-(R/L)t} \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{V^2}{R} (e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t})$$

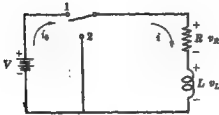
إذن القدرة الكلية هي

$$(14) \quad p_T = p_R + p_L = \frac{V^2}{R} (1 - e^{-2(R/L)t})$$

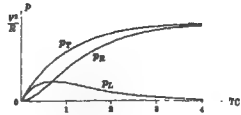
يوضح الشكل ١٦ - ٢ دوال القدرة الثلاث حيث تأخذ  $p_T$  و  $p_R$  في الحالة المستقرة القيمة  $V^2/R$  أو  $I^2 R$  ، حيث  $I$  هو تيار الحالة المستقرة . وتأخذ القدرة في الحث في فترة العبور أو الانتقال قيمة ابتدائية وقيمة نهائية متساويتين الصغر . وهذه القدرة هي الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسى الملف . ولتوضيح ذلك فإننا نكامل  $p_L$  من 0 إلى  $\infty$  .

$$(15) \quad W = \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R} (e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}) dt = \frac{V^2}{R} \left[ -\frac{L}{R} e^{-(R/L)t} + \frac{L}{2R} e^{-2(R/L)t} \right]_0^{\infty} \\ = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R} \left( \frac{L}{R} \right) = \frac{1}{2} L I^2 \text{ joules}$$





شكل ١٦ - ٦



شكل ١٦ - ٥

تحتوى دائرة  $RL$  الموضحة في الشكل ١٦ - ٦ على تيار ابتدائي  $i_0 = V/R$  . عند  $t = 0$  يكون المفتاح في الموضع 2 وبذلك تفصل المصدر وفي نفس الوقت تعمل دائرة مغلقة على فرع  $R$  و  $L$  المتصلين على التوالي . وبطبيق قانون كيرشوف الجهد على الدائرة الخالية من المصدر تلجج المادة

$$(16) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

وحلها هو

$$(17) \quad i = i_0 e^{-(R/L)t}$$

عند  $t = 0$  يكون التيار الابتدائي هو  $i_0 = V/R$  . وبالتعويض في المعادلة (١٧) عن  $c = V/R$  فإن معادلة التيار تصبح

$$(18) \quad i = \frac{V}{R} e^{-(R/L)t}$$

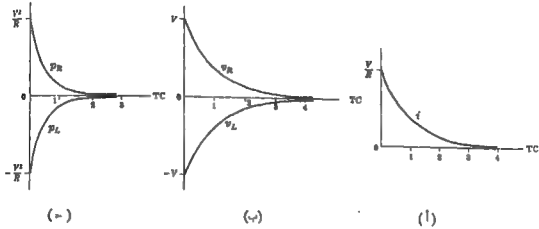
يوضح الشكل ١٦ - ٧ (أ) هذا الانحلال الأسي . والجهدان المتناظران عبر المقاومة والحث هما

$$(19) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = -V e^{-(R/L)t} \quad \text{و} \quad v_R = Ri = V e^{-(R/L)t}$$

كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٧ (ب) ، ويحقق المجموع  $v_R + v_L$  قانون كيرشوف حيث يكون الجهد المتأثر مساوياً

للمصدر عندما يكون المفتاح في الموضع 2 . يوضح الشكل ١٦ - ٧ (ج) القدرتين البطيئتين .

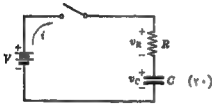
والصفر عندما يكون المفتاح في الموضع 1 . إذا كانت  $p_L$  من 0 إلى  $\infty$  فإننا نجد أن الطاقة المنطلقة متساوية تماماً إلى الطاقة التي اختزنت في المجال المغناطيسي خلال فترة المبدؤ أو الانتقال السابقة هي  $\frac{1}{2} L i_0^2$  . وتنتقل هذه الطاقة خلال انحلال شدة الانتقال إلى المقاومة .



شكل ١٦ - ٧

### دائرة RC في الحالة العابرة :

بتطبيق قانون كيرشوف الجهد على دائرة RC المتصلة على التوالي والموضحة في الشكل ١٦ - ٨ نكتب المعادلة التفاضلية التالية



شكل ١٦ - ٨

$$\frac{1}{C} \int i dt + Ri = V$$

وبعد إجراء التفاضل ينتج

$$(21) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

ويتكون حل المعادلة المتجانسة هذه من الثابتة فقط وذلك لأن الحل الخاص يساوى صفراً . أي أن

$$(22) \quad i = Ae^{-t/RC}$$

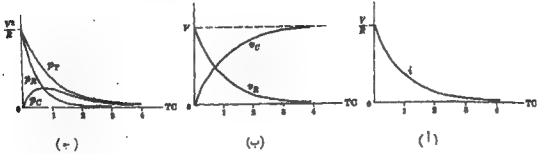
لتعيين الثابت C نلاحظ أنه عندما  $t = 0$  فإن المعادلة (٢٠) تصبح  $Ri_0 = V$  أو  $i_0 = V/R$  . والآن بالتعويض من قيمة  $i_0$  في المعادلة (٢٢) نحصل على  $C = V/R$  وذلك عندما  $t = 0$  . إذن

$$(23) \quad i = \frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

المعادلة (٢٣) هي على شكل التضاؤل أسي كما هو موضح في الشكل ١٦ - ٩ (أ) .

يوضح الشكل ١٦ - ٩ (ب) جهتي التدفق أو الانتقال المتناظرين

$$(24) \quad v_C = \frac{1}{C} \int i dt = V(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{و} \quad v_R = Ri = Ve^{-t/RC}$$



شكل ١٦ - ٩

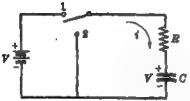
ويوضح الشكل ١٦-٩ (ج) القدرتين المظيتين .

$$(١٥) \quad p_C = v_C i = \frac{V^2}{R} (e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) \quad \text{و} \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

وتبر القدرة  $p_C$  في فترة الميود بتوسطها الابتدائية والنهاية المساوية لقصفر عن الطاقة المخزونة في الحمل الكهر .  
المكثف وذلك بجهد ثابت عبر طريقه . ويتحقق هذا من تكامل  $p_R$  من 0 إلى  $\infty$

$$(١٦) \quad \mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{V^2}{R} (e^{-t/RC} - e^{-2t/RC}) dt = \frac{1}{2} CV^2$$

عندما يكون المفتاح في الموضع 1 في دائرة RC على التوالي الموضحة في الشكل ١٦-٩ . تكون لدينا الحالة المستقرة ، وعندما  $t = 0$  يتحرك موضع المفتاح إلى 2 . وعند هذا الموضع المفتاح تكون معادلة الدائرة هي .



شكل ١٦ - ١٠

$$(١٧) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{C} \int i dt + Ri = 0$$

والحل هو

$$(١٨) \quad i = e^{-t/RC}$$

لتصوير الثابت  $C$  نضع  $t = 0$  في المعادلة (١٨) ونعوض بقيمة التيار الابتدائية  $i_0$  وحيث أن المكثف يشحن إلى جهد  $V$  بالقطبية الموضحة في الرسم ، فإن التيار الابتدائي يكون مساوياً لتيار  $i$  ، أي أن  $V/R = i_0$  . إذن  $C = -V/iR$  ومعادلة التيار هي

$$(١٩) \quad i = -\frac{V}{R} e^{-t/RC}$$

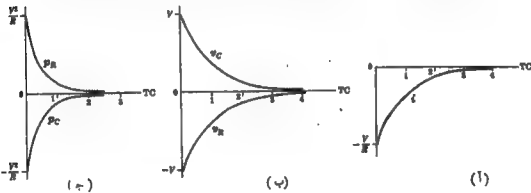
ويوضح الشكل ١٦-١١ (أ) انصهار فترة الميود . وجهنا الميود لمنصرى الدائرة المتناظرين هما

$$(٢٠) \quad v_C = \frac{1}{C} \int i \, dt = V e^{-t/RC} \quad \text{و} \quad v_R = Ri = -V e^{-t/RC}$$

كما هو موضح في الشكل ١١-١٦ (ب). لاحظ أن  $v_R + v_C = 0$  يحقق قانون كيرشوف وذلك لعدم وجود جهد مؤثر عندما يكون المفتاح في الموضع 2. وقد دنا المبرور هنا.

$$(٢١) \quad p_C = v_C i = -\frac{V^2}{R} e^{-2t/RC} \quad \text{و} \quad p_R = v_R i = \frac{V^2}{R} e^{-2t/RC}$$

كما هو موضح في الشكل ١١-١٦ (ج). لا يوجد مصدر للدلالة على  $p_R$  لكنه من الواضح أن الطاقة المخزونة في المكثف تطلق إلى المقاومة أثناء فترة المبرور. ويترك التيار الجهد أن تكامل  $p_C$  بالحد من 0 إلى  $\infty$  يساوي  $\frac{1}{2} CV^2$ .



شكل ١٦ - ١١

### الشحنة في حالة عابرة للدائرة RC

يكون من المناسب في بعض الأحيان معرفة المعادلة التي تحكم الشحنة  $q$  في دائرة RC على التوالي في حالة عابرة. ذلك لأن العلاقة بين التيار والشحنة هي  $i = dq/dt$  ونحصل على التيار إذا علمت عند الحاجة إلى بواسطة التفاضل.

في الشكل ١٢-١٦ يضمن المكثف بالقضية الموضحة حيث أن الجهد  $q$  هو نفسه اتجاه  $i$  الموضح في الشكل ١٦-١٨. ولكتب معادلة التيار الأساسية.

$$(٢٢) \quad \frac{1}{C} \int i \, dt + Ri = V$$

باستخدام الشحنة الأساسية والتعويض عن  $dq/dt$  بالتيار  $i$ .

إذاً

$$(٢٣) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)q = \frac{V}{R} \quad \text{أو} \quad \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = V$$

شكل ١٦ - ١٢

باستخدام الطريقة المستخدمة في الحصول على المادة (٥) يكون الحل هو

$$(٢٤) \quad q = ce^{-t/RC} + CV$$

عند  $t = 0$  تكون الشحنة الأساسية على المكثف هي  $q_0 = 0$

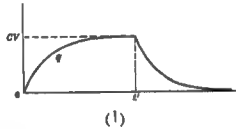
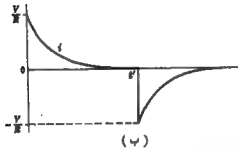
$$(٢٥) \quad c = -CV \text{ أو } q_0 = 0 = c(1) + CV$$

وبالتعويض عن قيمة  $c$  هذه في المعادلة (٢٤) نحصل على

$$(٢٦) \quad q = CV(1 - e^{-t/RC})$$

والشحنة العابرة ذات ارتفاع أسى وقيمها النهائية هي  $CV$ . وعلى ذلك فإنه يحلّل دائرة التصلل كالموضحة في الشكل ١٦-١٧ على أساس الشحنة فإنه ينتج لدينا شحنة التصلل من القيمة  $CV$  حسب المعادلة .

$$q = CVe^{-t/RC}$$



شكل ١٦ - ١٧

يوضح الشكل ١٦-١٧ (١) دالة الشحنة في حالة الارتفاع والتصلل ، كما يوضح الشكل ١٦-١٧ (ب) دالة التيار المناظرين . وسيت أن الشحنة يجب أن تكون دالة متصلة لأن  $q = CV$  عندما  $t' (-)$  و  $t' (+)$  بينما  $t = 0$  عند  $t' (-)$  ويساوي  $V/R$  عند  $t' (+)$  .

### دائرة RLC في الحالة العابرة :

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف جهد على دائرة RLC حل التوالى والموضحة في الشكل ١٦-١٧ المعادلة التفاضلية التالية .



$$(٢٨) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

وبالتفاضل نحصل على .

شكل ١٦ - ١٧

$$(٣٩) \quad \left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right)\xi = 0 \quad \text{أو} \quad L \frac{d^2\xi}{dt^2} + R \frac{d\xi}{dt} + \frac{\xi}{C} = 0$$

وهذه المادة التفاضلية الخطية والتي من الرتبة الأولى هي من النوع المتجانس وحلها الخاص يساوى صفراً . يمكن أن تأخذ الحالة الخاصة ثلاث صور مختلفة تعتمد على القيم النسبية لكل من  $R$  و  $L$  و  $C$  . إن معاملات المادة المميزة ثابتة ونظراً للمادة هما  $D^2 + (R/L)D + 1/LC = 0$

$$(٤٠) \quad D_2 = \frac{-R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}, \quad D_1 = \frac{-R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2}$$

وبمعنى  $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$  ، و  $\alpha = -R/2L$  نجد أن

$$(٤١) \quad D_2 = \alpha - \beta, \quad D_1 = \alpha + \beta$$

والمقدار الموجود تحت الجذر  $\beta$  يمكن أن يكون موجبا أو صفرا أو سالبا وذلك لأن الحل يكون إما زائلا المضادة أو حرج المضادة أو ناقص المضادة (متطلب) .

**الحالة ١ :**  $(R/2L)^2 > 1/LC$  : الجذران  $D_2$  و  $D_1$  حقيقيان وغير متساويان ويفتج ضهما حالة زيادة المضادة . إذن المادة (٣٩) يمكن أن تكتب في صيغة حاصل ضرب .

$$(٤٢) \quad [D - (\alpha + \beta)][D - (\alpha - \beta)]\xi = 0$$

والتي هي

$$(٤٣) \quad \xi = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) \quad \text{أو} \quad \xi = c_1 e^{(\alpha+\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-\beta)t}$$

**الحالة ٢ :**  $(R/2L)^2 = 1/LC$  : الجذران  $D_2$  و  $D_1$  متساويان والحل هو حالة التضاؤل الحرج وتكتب المادة (٣٩) في صيغة حاصل ضرب .

$$(٤٤)$$

$$[D - \alpha][D - \alpha]\xi = 0$$

والحل هو

$$(٤٥) \quad \xi = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t)$$

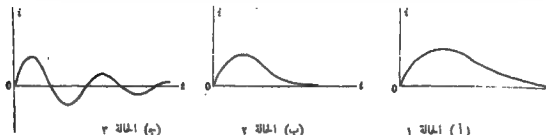
**الحالة ٣ :**  $(R/2L)^2 < 1/LC$  : الجذران  $D_2$  و  $D_1$  مترافقان مركبان والحل هو حالة التضاؤل الناقص أو المتطلب وتعرف  $\beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$  مع ترك  $\alpha$  بتعريفها السابق فإن المادة باستخدام المؤثرات تكتب على صيغة حاصل ضرب .

$$(٤٦) \quad [D - (\alpha + j\beta)][D - (\alpha - j\beta)]\xi = 0$$

والحل هو

$$(٤٧) \quad \xi = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

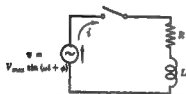
يمر التيار في كل الحالات على العامل  $e^{-\alpha t}$  وحيث أن  $\alpha = R/2L$  فإن قيمة التيار النهائية تساوى صفراً ، ولذا يؤكد أن الدالة التامة تنسحل في وقت قصير نسبياً . في الشكل ١٦-١٥ وصفت الحالات الثلاث عندما كانت القيمة الابتدائية مساوية للصفر وللبال الأساسى موجبا .



شكل ١٦ - ١٥

### التيارات المترددة العابرة

#### التيارات الجيبية العابرة في دائرة RL



شكل ١٦ - ١٦

يؤثر حل دائرة RL الموصلة في الشكل ١٦-١٦ عند غلق المفتاح جهد جيبى . يمكن لذلك الجهد أن يؤثر عند أية نقطة في الفترة من لحظة غلق المفتاح ، وحل هذا فإن زاوية الطور  $\phi$  تأخذ القيم من  $0 \rightarrow 2\pi$  rad/sec ويحتاج من تطبيق قانون كيرشوف للجهد المادة التالية

$$(٤٨) \quad \left(D + \frac{R}{L}\right)i = \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{أو} \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V_{max} \sin(\omega t + \phi)$$

والدالة الخاصة هي  $i_p = ce^{-(R/L)t}$  والحل الخاص هو

$$i_p = e^{-(R/L)t} \int e^{(R/L)t} \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \phi) dt = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

(٤٩)

$$i = i_p + i_s = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad \text{والحل التام هو}$$

ويجب الحث أى تغير فجائى في التيار وحيث أنه قبل غلق المفتاح كان التيار مساوياً للصفر أى أن  $i_0 = 0$  . إذن

$$c = \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad \text{و} \quad i_0 = 0 = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

(٥٠)

وبالتعويض في (٤٩) فإن التيار يكون

$$i = e^{-(R/L)t} \left[ \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\phi - \tan^{-1} \omega L/R) \right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \phi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

يعني الجزء الأول من المعادلة (٥٠) حل العامل  $e^{-(R/L)t}$  الذي يساوي قيمة الصفر في فترة زمنية قصيرة نسبياً . والصغير الموجود بين القوسين هو ببساطة ثابت مضاف إلى حد ما . وتعتمد قيمة هذا الثابت على الزمن في دورة  $\varphi$  الذي يعلق منه القطع . وإذا كان  $\varphi - \tan^{-1} \omega L/R = n\pi$  حيث  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  فإن التيار يساوي صفراً ويلتصق بالتيار مباشرة إلى الحالة المستقرة . وإذا كان  $\varphi - \tan^{-1} \omega L/R = (1 + 2n)\pi/2$  فإن تيار الدبور يكون عند قيمته العظمى الممكنة .

الجزء الثاني من المعادلة (٥٠) هو التيار في الحالة المستقرة وهو لاحق للجهود المؤثر بالزاوية  $\tan^{-1} \omega L/R$  وهذا الحل الخاص الذي حصلنا عليه من طريق التكامل يمكن الحصول عليه بطريقة المعاملات غير المحددة .

والطريقة صالحة عندما تكون الحالة المؤثرة حالة جيبية أو جيب تمامية أو أسية ، وذلك لأن التفاضل المتكرر لهذه الدوال ينتج عنه نفس مجموعة الدوال . ونطبق هذه الطريقة على المعادلة (٤٨) حيث الطرف الأيمن يساوي  $V_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$  فلنا نفرض تياراً خاصاً .

$$(٥١) \quad i_p = A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi)$$

حيث  $A$  و  $B$  ثابتان . إذن المشتقة الأولى هي

$$(٥٢) \quad i'_p = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

وبالتعويض عن  $i_p$  و  $i'_p$  في المعادلة (٤٨) نحصل على

$$(٥٣) \quad \begin{aligned} & (-A\omega \sin(\omega t + \varphi) + B\omega \cos(\omega t + \varphi)) \\ & + \frac{R}{L}(A \cos(\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \varphi)) = \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

وبتجميع معاملات الحدود المتكافئة ينتج .

$$(٥٤) \quad (-A\omega + BR/L) \sin(\omega t + \varphi) + (B\omega + AR/L) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{V_{\max}}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

والآن بمساواة معاملات الحدود المتكافئة ينتج معادلتين في  $A$  و  $B$  .

$$(٥٥) \quad B\omega + AR/L = 0 \quad \text{و} \quad -A\omega + BR/L = V_{\max}/L$$

ومنهما نجد أن

$$(٥٦) \quad B = \frac{RV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{و} \quad A = \frac{-\omega LV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

وبالتعويض عن قيمتي  $A$  و  $B$  في المعادلة (٥١) يكون التيار الخاص هو

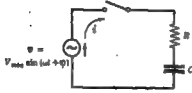
$$(٥٧) \quad i_p = \frac{-\omega LV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{RV_{\max}}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$(٥٨) \quad i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad \text{أو}$$

وهو نفس الحل الخاص الذي حصلنا عليه بالتكامل .



## التيارات الحارة الحسية في دائرة RC



شكل ١٦ - ١٧

يؤثر جهد جهز على الدائرة RC الموضحة في الشكل ١٦-١٧ وذلك عند خلق المفتاح . وينتج من تطبيق قانون كيرشوف الجهد على الدائرة المعادلة التالية .

$$(٥٩) \quad R i + \frac{1}{C} \int i dt = V_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$(٦٠) \quad \left(D + \frac{1}{RC}\right)i = \frac{\omega V_{max}}{R} \cos(\omega t + \varphi)$$

والدالة المتصلة هي

$$(٦١) \quad i = e^{-t/RC} + e^{i\omega t}$$

والحل الخاص الذي نحصل عليه من طريق التكامل أم طريق المعادلات غير المحددة هو

$$(٦٢) \quad i = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

إذن الحل التام هو

$$(٦٣) \quad i = e^{-t/RC} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

لتعيين الثابت c نضع  $t = 0$  في المعادلة (٥٩) ، فيكون التيار الابتدائي هو  $i_0 = \frac{V_{max}}{R} \sin \varphi$  وبالتعويض

بهذه القيمة في المعادلة (٦٣) مع وضع  $t = 0$  نحصل على

$$(٦٤) \quad \frac{V_{max}}{R} \sin \varphi = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

$$(٦٥) \quad c = \frac{V_{max}}{R} \sin \varphi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \quad \text{أو}$$

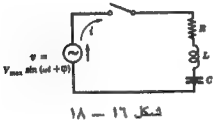
بالتعويض من c من (٦٥) في (٦٣) ينتج التيار التام

$$(٦٦) \quad i = e^{-t/RC} \left[ \frac{V_{max}}{R} \sin \varphi - \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR) \right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \varphi + \tan^{-1} 1/\omega CR)$$

والحد الأول هو تيار العمود المسجل بمعامل  $e^{-t/RC}$  . والقيمة الداخلية والتي بين قوسين هي كمية ثابتة . والحد الثاني هو تيار الحالة المستقرة وهو سابق لجهة المؤثر بزاوية  $\tan^{-1} 1/\omega CR$  .

### التيارات العابرة الجيبية في دائرة RLC

يؤثر على دائرة التوال RLC الموضحة في الشكل ١٦-١٨ جهد جبري وذلك عند غلق المفتاح . والمادة الناتجة هي



شكل ١٦ - ١٨

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V_{max} \sin(\omega t + \phi) \quad (٦٧)$$

وبالتفاضل واستخدام الترميز بالمؤثرات نحصل على

$$(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC})i = \frac{\omega V_{max}}{L} \cos(\omega t + \phi) \quad (٦٨)$$

نحصل على الحل الخاص بطريقة المعاملات غير المحددة كما يلي . لنضع أولاً  $i_p = A \cos(\omega t + \phi) + B \sin(\omega t + \phi)$  ثم نحسب  $i_p'$  ثم نموض عن  $i_p'$  في المادة (٦٧) . ونحصل على قيم  $A$  و  $B$  . بمساواة معاملات الحدود المشابهة كما فعلنا سابقاً في حالة تيار الانتقال (أو العمود) الجبري لدائرة RL . وبالتعبير عن النتيجة بدالة جيبية واحدة يكون الحل الخاص هو

$$i_p = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}) \quad (٦٩)$$

والدالة المتصلة مطابقة لما في حالة دائرة التوال RLC بتيار مستمر السابق دراسته ، حيث كانت النتيجة لتساوياً زائداً أو تضاعوا حرجاً أو تضاعوا متساوياً حسب قيم  $R$  و  $L$  و  $C$  .

**الحالة ١ :**  $(R/2L)^2 = 1/LC$  الجذران حقيقيان وغير متساويين وتنتج بذلك حالة تضاعوا زائداً .  
حيث  $D_1 = \alpha + \beta$  و  $D_2 = \alpha - \beta$  و  $\alpha = -R/2L$  و  $\beta = \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$  والحل التام هو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}) \quad (٧٠)$$

**الحالة ٢ :**  $(R/2L)^2 > 1/LC$  . الجذران حقيقيان ومتساويان وتنتج بذلك حالة تضاعوا حرج ، والتيار التام هو

$$i = e^{\alpha t}(c_1 + c_2 t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R}) \quad (٧١)$$

الحالة ٣ :  $1/LC < (R/2L)^2$  الجدران مترافقان مركبان وتنتج عن ذلك حالة التذبذب والتهيار التام هو (٧٢)

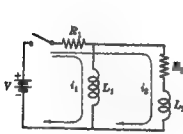
$$i = e^{at}(a_1 \cos \beta t + a_2 \sin \beta t) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{(1/\omega C - \omega L)}{R})$$

$$\text{حيث } \beta = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$$

يتطابق الحل الخاص لكل المعادلات (٧٠) و (٧١) و (٧٢) بيئياً بخلف تيار العبور المحلى بالدالة المتصلة في كل حالة .  
 فبالا في الحالة ٣ يحتوي تيار العبور على مجموعة دوال جيبية ترددها  $\beta \text{ rad/sec}$  ، وهذا التردد يختلف عموماً عن تردد الحل الخاص  $\omega$  . وبالتالي لا يمكن استنتاج ظهور تيار خلال فترة العبور ، وعادة ما يأخذ شكل غير منتظم تماماً . وبمجرد أن يصبح تيار العبور مساوياً للصفر بفعل عامل الاختساف ، فإن التيار يصبح إذن سابقاً أو لاحقاً للجهود المؤثر تبعاً للقيم النسبية للمسامات  $\omega L$  و  $1/\omega C$  بزوايا  $\tan^{-1} (1/\omega C - \omega L)/R$

### تيارات الانتقال لشبكتين فرعيتين

ينتج عن تطبيق قانون كيرشوف للجهود على شبكتين فرعيتين لشبكة الكهربية الموضحة في الشكل ١٦ - ١٩ المعادلتان التفاضليتان الآتيتان :



شكل ١٦ - ١٩

$$(٧٣) \quad \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 &= V \\ R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= V \end{aligned}$$

باستخدام الترتيب بالمؤثرات وإعادة الترتيب نحصل على

$$\begin{aligned} (D + R_1/L_1) i_1 + (R_2/L_1) i_2 &= V/L_1 \\ (R_1/L_2) i_1 + \left( D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \right) i_2 &= V/L_2 \end{aligned}$$

$$(٧٤) \quad \begin{bmatrix} D + R_1/L_1 & R_2/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/L_1 \\ V/L_2 \end{bmatrix} \quad \text{أو}$$

والحصول على معادلة في  $i_2$  لا تعتمد على  $i_1$  فإننا نستخدم المحددات ونكتب

$$(٧٥) \quad \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_2/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_1 = \begin{vmatrix} V/L_1 & R_2/L_1 \\ V/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix}$$

فلك محددة الطرف الأيسر و نرتبها على حسب قوى  $D$  بانتازية . ويظهر الحد  $D(V/L_2)$  في مفكوك محدد الطرف الأيمن ، ولكن حيث أن  $D = d/dt$  و  $D = d/dt$  ثابت فإن قيمة هذا الحد تساوى صفراً .

$$(٧٦) \quad \left[ D^2 + \left( \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right] i_1 = V R_2 / L_1 L_2$$

والمعادلة المميزة هي حل الصيغة  $D^2 + AD + B = 0$  وحيث أنه في هذه الحالة  $A^2 - 4B > 0$  لجميع قيم ثوابت الدائرة (فيها عدداً الحالة التي يكون فيها  $L_1$  أو  $L_2$  مساوياً للصفر) فالدالة الختمة هي حل الصورة المسطحة في المعادلة (٤٢) . حيث أن الدالة المؤثرة ثابتة لأن الحل الخاص هو الثابت الذي يحقق المعادلة

$$(٧٧) \quad i_{\infty} = V/R_1 \text{ أو } \left( \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right) i_{\infty} = V R_2 / L_1 L_2$$

والآن بتطبيق نفس الطرق على  $i_2$  نحصل على

$$(٧٨) \quad \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & R_1/L_1 \\ R_1/L_2 & D + \frac{R_1 + R_2}{L_2} \end{vmatrix} i_2 = \begin{vmatrix} D + R_1/L_1 & V/L_1 \\ R_1/L_2 & V/L_2 \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدتين نحصل على

$$\left[ D^2 + \left( \frac{R_1 L_1 + R_2 L_1 + R_1 L_2}{L_1 L_2} \right) D + \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2} \right] i_2 = 0$$

والمعادلة المميزة هي نفسها كما في المعادلة (٧٦) ، وبالتالي فإن التوال الختمة متطابقة . وحيث أن المعادلة من النوع التفاضلي فإن الحل الخاص لتيار  $i_2$  يساوي صفراً .

وبدراسة الدائرة نجد أن هذا متوقع تماماً ، ذلك لأنه في الحالة المستقرة يحمل  $L_1$  كثافة مغلقة على الفرع  $R_2 L_2$  وبذلك يحمل التيار بحد ذاته على هذا الفرع .

المقاومة  $R_2$  هي المقاومة النهائية في الحالة المستقرة وينتج عن ذلك أن  $i_2 = V/R_1$  كما في المعادلة (٧٧) .

### مسائل محلولة

١-١٦ دائرة  $RL$  على التوالي تتكون من  $R = 50 \Omega$  ،  $L = 10 \text{ H}$  يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 100 \text{ V}$  عندما

$t = 0$  ، وذلك عند فتح المفتاح - أوجد (أ) معادلات كل من  $i$  و  $v_R$  و  $v_L$  ، (ب) لتيار عندما  $t = 0.5 \text{ Seconds}$  .

(ج) أقر من أي عنده  $v_R = v_L$  .

(أ) المعادلة التفاضلية لتيار المحل هي

$$(١) \quad (D + 5)i = 10 \text{ أو } 50i + 10 \frac{di}{dt} = 100$$

والحل التام هو

$$(٢) \quad i = i_2 + i_1 = e^{-5t} + 2$$

مع  $t = 0$  نجد أن  $i_0 = 0$  أي أن  $i = 2(1 - e^{-t})$  أو  $i = -2$  . إذن

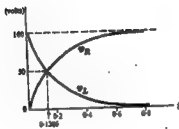
$$i = 2(1 - e^{-t}) \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦-٢٠ (أ) هذه العلاقة .

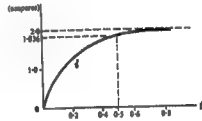
والجهود المتناظران عبر عنصرى البطارية هما

$$(١) \quad v_L = L \frac{di}{dt} = 100e^{-t} \text{ volts} \quad \text{و} \quad v_R = Ri = 100(1 - e^{-t}) \text{ volts}$$

ويوضح الشكل ١٦-٢٠ (ب) هاتين العلاقتين



(ب)



(أ)

شكل ١٦ - ٢٠

(ب) لنفك في المادة (٣)  $t = 0.5$  seconds لنحصل على  $i = 2(1 - e^{-0.5}) = 1.836$  A

(ج) عندما  $v_L = v_R$  فإن كلا منهما يجب أن يساوى 50 V ، وحيث أن الجهد المؤثر يساوى 100 فإننا نفك

أيام  $v_R$  أو  $v_L$  يساوى 50 V ثم نحل المعادلة للحصول على  $t$  . من المعادلة (١)  $v_L = 50 = 100e^{-t}$  volts

إذن  $0.5 = e^{-t}$  أو  $5t = 0.693$  و  $t = 0.1386$  s

١٦-٢٠ بالإشارة إلى المسألة ١٦-١٦ أوجد مصادق  $P_R$  و  $P_L$  ثم بين أن القدرة في الحث تفر من الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسى في الحالة المستقرة .

باستخدام التيار والجهد الذى حصلنا عليهما في المسألة ١٦-١٦ فإن معادلات القدرة اللحظية تكون

$$P_R = v_R i = 100(1 - e^{-t}) 2(1 - e^{-t}) = 200(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) \text{ watts}$$

$$P_L = v_L i = 100e^{-t} 2(1 - e^{-t}) = 200(e^{-t} - e^{-2t}) \text{ watts}$$

$$P_T = P_R + P_L = 200(1 - e^{-2t}) \text{ watts}$$

والطاقة المخزنة في الحالة المستقرة هي  $W = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (10)(2)^2 = 20 \text{ joules}$  .

و تكامل  $P_L$  من  $t = 0$  إلى  $t = \infty$  هو  $W = \int_0^{\infty} 200(e^{-t} - e^{-2t}) dt = 20 \text{ joules}$  .

١٦-٣ في دائرة التوالى الموضحة في الشكل ١٦-٢١ إذا أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عندما كانت  $t = 0$  وبذلك يؤثر مصدر مقدار  $100 \text{ V}$  على الفرع  $RL$  ، وعندما كانت  $t = 500 \mu\text{s}$  يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 . فأوجد معادلى التيار في كلتا الفترتين وأوسم تيار الممرور .

عندما كان المفتاح في الموضع 1 فإن المعادلة هي

$$(1) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = 100 \quad (D + 500)i = 500$$

والتيار التام هو :

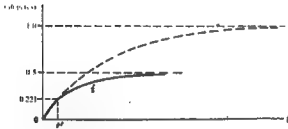
$$(2) \quad i = c_1 e^{-2500t} + 1.0 \text{ amperes}$$

وعندما  $t = 0$  كانت  $i = 0$  وبطبيق الشرط الابتدائى على المعادلة (٢) نجد أن  $0 = c_1(1) + 1.0$  أو  $c_1 = -1.0$  إذن التيار هو

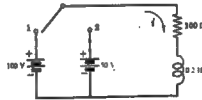
$$(3) \quad i = 1.0(1 - e^{-2500t}) \text{ amperes}$$

والآن عند زمن فترة  $500 \mu\text{ sec}$  فإن التيار يكون

$$(4) \quad i = 1.0(1 - e^{-2500 \times 500 \times 10^{-6}}) = 1.0(1 - 0.779) = 0.221 \text{ A}$$



شكل ١٦ - ٢٢



شكل ١٦ - ٢١

عندما يكون المفتاح في الموضع 2 فإن الجهد المؤثر يكون  $50 \text{ V}$  بنفس قطبية المصدر  $100 \text{ V}$  وتكون المادة هي

$$(5) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = 50 \quad (D + 500)i = 250$$

وبها نحصل على

$$(6) \quad i = c_2 e^{-2500(t-t')} + 0.5 \text{ amperes}$$

حيث  $500 \mu s = t'$  . والآن بوضع  $t = t'$  في المادة (٦) فإن التيار يكون  $0.221 \text{ A}$  كما في المادة (٤).

$$c_2 = -0.279 \quad \text{و} \quad i = 0.221 = c_2(1) + 0.5$$

وعندما  $t < t'$  فإن

$$(٧) \quad i = -0.279e^{-500(t-t')} + 0.5 \text{ amperes}$$

وتطبق المادة (٣) في الفترة  $0 < t < t'$  وفي هذه الحالة فإن تيار العبور الموضح بالنقط في الشكل ١٦ - ٢٢ يتقرب من قيمته في الحالة المستقرة وهي  $1.0$  . عند  $t'$  يكون التيار  $0.221 \text{ A}$  والمفتاح في الموضع 2 وفي هذه الحالة تطبق المادة (٧) عندما  $t < t'$  والقيمة النهائية للتيار في هذه الحالة تساوي  $0.5 \text{ A}$  كما هو موضح .

١٦ - ٤ كرر المسألة ١٦ - ٣ مع عكس قطبية المصدر  $50 \text{ V}$  .

الجزء الأول من تيار العبور عندما كان المفتاح في الموضع (1) هو نفسه الذي حصلنا عليه في المسألة ١٦ - ٣ :  $i = 1.0(1 - e^{-500t})$  و  $i = 0.221 \text{ A}$  عندما  $t = 500 \mu s$  .

وبعكس قطبية المصدر  $50 \text{ V}$  نتج المادة التالية

$$(١) \quad 100i + 0.2 \frac{di}{dt} = -50 \quad \text{أو} \quad (D + 500)i = -250$$

وحلها هو

$$(٢) \quad i = ce^{-500(t-t')} - 0.5 \text{ amperes}$$

والآن عندما  $t = t'$  فإن التيار يكون  $0.221 \text{ A}$

وبالتعويض في المادة (٢) نجد أن

$$c = 0.721 \text{ أو } 0.221 = c(1) - 0.5$$

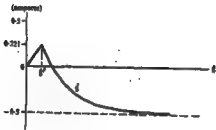
إذن معادلة التيار عندما  $t > t'$  هي

$$i = 0.721e^{-500(t-t')} - 0.5 \text{ amperes}$$

وبوضع الشكل ١٦ - ٢٢ تيار العبور بقيمته

النهائية  $-0.5 \text{ A}$  — ذلك لأن اتجاه المصدر  $50 \text{ V}$  عكس

الاتجاه الموجب المفروض للتيار  $i$  .



شكل ١٦ - ٢٢

١٦ - ٥ دائرة توالي تتكون من  $R$  و  $C$  فيها  $R = 3000 \Omega$  و  $C = 20 \mu F$  يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 100 \text{ V}$

عند  $t = 0$  والمكثف لا يحمل شحنة ابتدائية . أوجد معادلات  $i$  و  $v_R$  و  $v_C$  .

عند ظان المفتاح تكون المادة هي

$$(١) \quad 5000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وبالتفاضل واستخدام رموز المؤثرات نحصل على

$$(٢) \quad i = 0.02e^{-10t} \quad \text{وحلها هو} \quad (D+10)i = 0$$

بوضع  $t = 0$  في المعادلة (١) نحصل على التيار الابتدائي  $i_0 = 100/5000 = 0.02 \text{ A}$  وبالتفويض بهذه القيمة في المعادلة (٢) نحصل على  $c = 0.02$  . إذن معادلة التيار هي

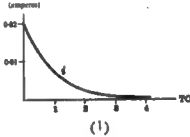
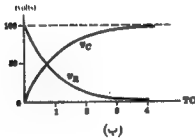
$$(٣) \quad i = 0.02e^{-10t} \text{ amperes}$$

وهذا الممر عبر عنصرى الدائرة هما

$$v_R = Ri = 5000(0.02e^{-10t}) = 100e^{-10t} \text{ volts}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int 0.02e^{-10t} dt = 100(1 - e^{-10t}) \text{ volts}$$

يوضح الشكل ١٦-٢٤ تيار وجهى الممر . في الحالة المستقرة  $v_C = 100 \text{ V}$  ,  $v_R = 0$



شكل ١٦ - ٢٤



شكل ١٦ - ٢٥

١٦-٢٥ إذا كان حل المكثف  $20 \mu\text{F}$  في دائرة RC الموصلة في الشكل ١٦-٢٥ شحنة ابتدائية  $q_0 = 500 \mu\text{ Coulombs}$  وذلك بالطاقة الموصلة في الرسم . زعمت  $t = 0$  أطلق المفتاح وبانتال أثرنا بالمجهد الثابت  $V = 50 \text{ V}$  فأوجد تيار الممر .

منه خلق المفتاح تكون المعادلة هي

$$(١) \quad (D+80)i = 0 \quad \text{أو} \quad 1000i + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \int i dt = 50$$



والحل هو

$$(٢) \quad i = e e^{-20t} \text{ amperes}$$

والآن فإن المصدر 50 V يحرك تياراً في الاتجاه الموضح بالرسم وينتج من ذلك شحنة موجبة على اللوح العلوي المكثف .  
ينتج من الشحنة الأساسية على المكثف  $q_0$  جهد مقداره  $25 \text{ volts}$   $V_0 = q_0/C = (300 \times 10^{-9})/(20 \times 10^{-9}) = 25 \text{ volts}$   
وهو أيضاً يرسل تياراً في اتجاه  $i$  كما هو موضح وحل هذا عندما  $t = 0$  فإن التيار الأساسي يكون  
 $i = 0.075 \text{ A}$   $i_0 = (V + q_0/C)/R = (50 + 25)/1000 = 0.075 \text{ A}$   
إذن  $i = 0.075 e^{-20t} \text{ amperes}$

١٦-٧ كرر المسألة ١٦ باستخدام المكثف كالمس المهور .

معادلة الشحنة الأساسية هي

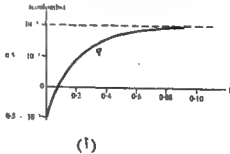
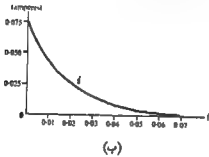
$$(١) \quad (D + 50)q = 0.05 \text{ أو } 1000 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{20 \times 10^{-9}} = 50$$

وحلها هو

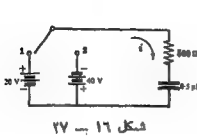
$$(٢) \quad q = e e^{-20t} + 10^{-3} \text{ coulombs}$$

عند  $t = 0$  يكون على المكثف شحنة موجبة مقدارها  $0.5 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$  على اللوح السفلي .  
قطبية الشحنة المترتبة أثناء فترة المهور موجبة على اللوح العلوي . إذن يوضع  $q_0 = -0.5 \times 10^{-3}$   
و  $t = 0$  في المعادلة (٢) نجد أن  $c = -1.5 \times 10^{-3}$  إذن  $c = -1.5 \times 10^{-3} + 10^{-3}$  ومعادلة  
تيار المهور هي  $i = dq/dt = 0.075 e^{-20t} \text{ amperes}$

يبين منحنى المهور الموضح في الشكل ١٦-٢٦ (أ) أنه يوجد على اللوح السفلي المكثف شحنة أساسية موجبة  
مقدارها  $0.5 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$  وشحنة نهائية مقدارها  $1.0 \times 10^{-3} \text{ coulombs}$  بقطبية موجبة على  
اللوحة العلوي . يوضح الشكل ١٦-٢٦ (ب) تيار المهور  $i = dq/dt$  .



شكل ١٦-٢٦



١٦-٨ في دائرة  $RC$  الموضحة في الشكل ١٦-٢٧ ألقن المتاح عند الموضع ١ عندما كانت  $t = 0$  وبهد  $1\text{ TC}$  تحرك إلى الموضع ٢ . أوجد تيار العبور التام .  
عندما كان المفتاح في الموضع ١ فإن حل المادة المتعاضلة التي نحصل عليها بتطبيق قانون كيرشوف للجهد على الدائرة هو

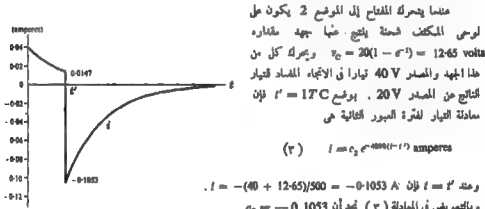
(١)

$$i = c_1 e^{-t/\text{TC}} = c_2 e^{-500t} \text{ amperes}$$

عند  $t = 0$  نجد أن  $i_0 = V/R = 20/500 = 0.04\text{ A}$  . وبالتعويض في المادة (١) نحصل على  $c_1 = 0.04$  والتيار في الفترة  $0 < t < 1\text{ TC}$  هو

$$i = 0.04 e^{-500t} \text{ amperes}$$

ويستمر هذا العبور إلى  $250\text{ microseconds}$  إلى  $1\text{ TC} = RC = 500(0.5 \times 10^{-6}) = 250\text{ microseconds}$  . وعند هذه النقطة فإن قيمة التيار تكون  $0.0147\text{ A} \approx 0.04e^{-1}$  .



شكل ١٦ - ٢٨

عندما يتحرك المفتاح إلى الموضع ٢ يكون حل لوصف المكثف شحنة ينتج عنها جهد مقداره  $12.65\text{ volts} = 20(1 - e^{-1})$  ويحرك كل من هذا الجهد والمصدر  $40\text{ V}$  تيارا في الاتجاه المضاد لتيار الناتج عن المصدر  $20\text{ V}$  . وبوضع  $t' = 1\text{ TC}$  فإن معادلة التيار لفترة العبور الثانية هي

$$(٢) \quad i = c_3 e^{-500(t-1\text{TC})} \text{ amperes}$$

وعند  $t = t'$  فإن  $i = -0.1053\text{ A}$  . وبالتعويض في المادة (٢) نجد أن  $c_3 = -0.1053$  والتيار هو

$$(٤) \quad i = -0.1053 e^{-500(t-1\text{TC})} \text{ amperes}$$

ويوضح الشكل ١٦-٢٨ تيار العبور التام . وعند  $1\text{ TC}$  يكون التيار نهاية صفري قيمتها  $-0.1053\text{ A}$  .

٩-١٦ أوجد شحنة العبور في المسألة ٨-١٦ ثم لاخلها لتصل حل التيار .

معادلة الشحنة الأساسية عندما كان المفتاح في الموضع ١ هي

(١)

$$(D + 4000)q = 0.04 \quad \text{أو} \quad 500 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.5 \times 10^{-6}} = 20$$

والحل هو

$$(٢) \quad q = c_1 e^{-\alpha \cos t} + 10 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

عند  $t = 0$  فإن  $q_0 = 0$  وتطبيق هذا الشرط الابتدائي على المعادلة (٢) نحصل على  $c_1 = -10 \times 10^{-6}$  وعلى هذا فإن

$$(٣) \quad q = 10 \times 10^{-6} (1 - e^{-\alpha \cos t}) \text{ coulombs}$$

وتطبق هذه المعادلة في الفترة  $0 < t < t'$  حيث  $t' = 1 \text{ TC}$  . وعند  $t' = 1 \text{ TC}$  تكون الفجوة على المكثف هي

$$q = 10 \times 10^{-6} (1 - e^{-\alpha}) = 6.32 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

عندما يكون المتاح في الموضع 2 تكون المادة المتفائلة هي

$$(٤) \quad (D + 4000)q = -0.08 \text{ أو } 500 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.3 \times 10^{-3}} = -40$$

وحلها هو

$$(٥) \quad q = c_2 e^{-\alpha \cos(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

والآن نعين  $c_2$  بالتعويض عن قيمة  $q$  عند  $t' = 1 \text{ TC}$  ونضع  $t = 1 \text{ TC}$  وذلك في المعادلة (٥) . إن

$$\text{إذن } c_2 = 26.32 \times 10^{-6} \text{ أو } 6.32 \times 10^{-6} = c_2(1) - 20 \times 10^{-6}$$

$$(٦) \quad q = 26.32 \times 10^{-6} e^{-\alpha \cos(t-t')} - 20 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

ويوضح الرسم ١٦-٢٩ شحنة النبوء العامة .

ونحصل على تيار النبوء المناظر بتفاضل المعادلتين (٣) ،

(٦) . وعلى هذا فإنه في الفترة  $0 < t < t'$  يكون

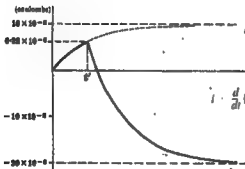
التيار هو

$$i = \frac{d}{dt} (10 \times 10^{-6} (1 - e^{-\alpha \cos t})) = 0.04 e^{-\alpha \cos t} \text{ amperes}$$

وعندما  $t > t'$  فإن

$$i = \frac{d}{dt} (26.32 \times 10^{-6} e^{-\alpha \cos(t-t')} - 20 \times 10^{-6}) = -0.1053 e^{-\alpha \cos(t-t')} \text{ amperes}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها بالمعادلتين (٢) ، (٤) في المسألة ١٦-٨ .



شكل ١٦ - ٢٩

١٠-١٦ دائرة توالى تتكون من  $R = 3000 \Omega$  لها  $L = 10 \text{ H}$  و  $C = 200 \mu\text{F}$  . يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 50 \text{ V}$  عند  $t = 0$  . أوجد تيار العبور والقيمة العظمى لتيار علماً بأنه لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف .

يعد خلق المفتاح تكوين المادة هي

$$(1) \quad (D^2 + 300D + 500)i = 0 \quad \text{أو} \quad 3000i + 10 \frac{di}{dt} + \frac{1}{200 \times 10^{-6}} \int i dt = 50$$

وجعلنا المادة المميزة هما  $D_1 = -298.3$  و  $D_2 = -1.67$

$$(2) \quad i = c_1 e^{-1.67t} + c_2 e^{-298.3t} \text{ amperes}$$

ولحساب قيمتي  $c_1$  و  $c_2$  فإننا نستخدم الشروط الابتدائية . حيث أن دائرة التوالى تحتوي على حث فإن حالة التيار يجب أن تكون متصلة . وحيث أن  $t = 0$  عند  $t = 0$  فإن  $i$  أيضاً يساوى صفراً عند  $t = 0$  . إذن من المعادلة (١) نجد أن  $50 = 10 \frac{di}{dt} + 3000i$  ، والآن بكتابة المعادلة (٢) عند  $t = 0$  نجد أن :  $(1) \quad c_1 + c_2 = 0$  أو  $c_1 = -c_2$  . بوضع  $t = 0$  في المشتقة الأولى للمعادلة (٢) وبالتعويض عن  $\frac{di}{dt}$  نحصل على  $5 = -1.67c_1 - 298.3c_2$  ، وبحل المعادلتين الآتيتين المتعلقين بالثوابت نحصل على  $c_1 = 0.0168$  و  $c_2 = -0.0168$  إذن

$$(3) \quad i = 0.0168 e^{-1.67t} - 0.0168 e^{-298.3t} \text{ amperes}$$

لنحصل على القيمة العظمى للتيار لنضع  $di/dt$  مساوية للصفر ثم نحل المعادلة للحصول على  $t$

$$t = 0.0175 \text{ s} \quad \text{أو} \quad \frac{di}{dt} = (0.0168)(-1.67)e^{-1.67t} - (0.0168)(-298.3)e^{-298.3t} = 0$$

وبالتعويض عن قيمة  $t$  هذه في المعادلة (٣) نحصل على **0.0161A** .

١١-١٦ دائرة توالى تتكون من  $R = 50 \Omega$  لها  $L = 0.1 \text{ H}$  و  $C = 50 \mu\text{F}$  . يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 100 \text{ V}$  عند  $t = 0$  . أوجد تيار العبور بفرض أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوى صفراً .

يعد خلق المفتاح تحويل المادة إلى الآلية :

$$(1) \quad (D^2 + 500D + 7 \times 10^4)i = 0 \quad \text{أو} \quad 50i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وجعلنا المادة المميزة هما  $D_1 = -250 + j371$  و  $D_2 = -250 - j371$  ، والتيار هو

$$(2) \quad i = e^{-250t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) \text{ amperes}$$

والتيار يساوى صفراً عند  $t = 0$  . إذن من المعادلة (٢) نجد أن  $0 = (1)(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0)$  و  $c_2 = 0$  ، والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة

(٣)

$$i = e^{-250t} c_2 \sin 371t \text{ amperes}$$

بمفاضل المعادلة (٣) نجد أن

(٤)

$$di/dt = c_2 \{ e^{-250t} (371) \cos 371t + e^{-250t} (-250) \sin 371t \}$$

عند  $t = 0$  نجد من المعادلة (٤)  $100 = (di/dt) = 0.1$  أو  $1000 = di/dt$  ، وبالتصنيف في المعادلة(٤) عند  $t = 0$  نجد أن  $1000 = c_2 371 \cos 0$  و  $c_2 = 2.7$  . إذن التيار المطلوب هو

$$i = e^{-250t} (2.7 \sin 371t) \text{ amperes.}$$

١٦-١٧ دائرة توال تتكون من  $RL$  فيها  $R = 50 \Omega$  و  $L = 0.2 \text{ H}$  ولها مصدر جهد جبري

$$v = 150 \sin (500t + \phi) \text{ volts}$$

عند الزمن الذي كانت عنده  $\phi = 0$  . أوجد التيار التام .

مت غلق المفتاح تكون المعادلة التفاضلية هي

(١)

$$(D + 250)i = 750 \sin 500t \text{ أو } 50i + 0.2 \frac{di}{dt} = 150 \sin 500t$$

والدالة الخاصة هي  $i_p = e^{-250t}$ 

لإيجاد الحل الخاص نستخدم طريقة المعاملات غير المحددة ونفرض تياراً خاصاً

(٢)

$$i_p = A \cos 500t + B \sin 500t$$

إذن

(٣)

$$i_p' = -500A \sin 500t + 500B \cos 500t$$

وبالتصنيف عن  $i$  و  $i'$  في المعادلة (١) نحصل على

$$(-500A \sin 500t + 500B \cos 500t) + 250(A \cos 500t + B \sin 500t) = 750 \sin 500t$$

بمساواة معاملات  $\sin 500t$  ومعاملات  $\cos 500t$  نحصل على

(٤)

$$500B + 250A = 0 \text{ و } -500A + 250B = 750$$

وبحل حاتين المعادلتين الآتيتين نجد أن  $A = -1.2$  و  $B = 0.6$  . إذن

(٥)

$$i_p = -1.2 \cos 500t + 0.6 \sin 500t = 1.34 \sin (500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

والتيار التام هو

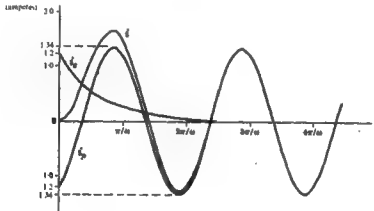
(٦)

$$i = e^{-250t} + 1.34 \sin (500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

وعند  $t = 0$  نجد أن  $i = c(1) + 1.34 \sin(-63.4^\circ)$  ، و  $c = 1.2$  ، إذن

$$(v) \quad i = 1.2 e^{-200t} + 1.34 \sin(500t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

يوضح الشكل ١٦ - ٣٠  $i$  و  $i_p$  ومجموعهما  $i$  بعد انتهاء فترة العبور (تقريباً عندما  $t = 5 \text{ TC}$ ) . يكون التيار جيئياً ولاحقاً الجهد المؤثر بزاوية  $\theta \sim \tan^{-1} \omega L/R = 63.4^\circ$  .



شكل ١٦ - ٣٠

١٦ - ١٣ عند أي زاوية  $\phi$  يجب خلق المفتاح في الدائرة الموصلة في المسألة ١٦ - ١٢ حتى يلعب التيار مباشرة إلى الحالة المستقرة بدون فترة عبور ؟

إذا كانت  $\phi = 0$  فلنأخذ من المادة (٦) في المسألة ١٦ - ١٢

$$i = c e^{-200t} + 1.34 \sin(500t + \phi - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$

عند  $t = 0$  نجد أن  $0 = c(1) + 1.34 \sin(\phi - 63.4^\circ)$  ، الآن تكون فترة العبور مساوية للصفر إذا كان الثابت

$$c = 0 \text{ ويحدث هذا عندما } \phi = (63.4^\circ + n 180^\circ) \text{ حيث } n = 0, 1, 2, \dots$$

١٦ - ١٤ دائرة توالى تتكون من  $RC$  فيها  $R = 100 \Omega$  و  $C = 25 \mu F$  . يؤثر عليها مصدر جهد جوى  $v = 250 \sin(500t + \phi)$  volts عند الزمن الذي كانت عنده  $\phi = 0^\circ$  . أوجد التيار بفرض أنه لا يوجد شحنة ابتدائية حل المكثف .

عند خلق المفتاح تكون المادة التفاضلية للدائرة هي

$$(1) \quad (D + 400)i = 1250 \cos 500t \text{ أو } 100t + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i dt = 250 \sin 500t$$

والدالة الختمة هي  $i_p = c e^{-400t}$

لإيجاد التيار نحس الطرف الأيمن في معادلة المؤثرات مساوياً الجزء الخلفى لكى  $1250 e^{-400t}$  وبفرض أن التيار  $i$  الخاص هو

(٢)

$$i_p = K e^{2000t} \text{ amperes}$$

إذن

(٣)

$$i_p = 500 K e^{2000t} \text{ amperes}$$

وبالتعويض عن الزمن  $t$  و  $t'$  في المادة (١) نحصل على

(٤)

$$500 K e^{2000t} - 400(K e^{2000t}) = 1250 e^{2000t}$$

ومن هنا نجد أن  $K = 1.955 \text{ — } 51.3^\circ$ . ندوس بقيمة  $K$  هذه في المادة (٢) ، ولكن حيث أن الجهدالمحرك يساوي الجزء الحقيقي الكمية  $1250 e^{2000t}$  فإن التيار الفعلي يساوي الجزء الحقيقي للمعادلة (٢)

$$i_p = 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ) \text{ و التيار التام هو}$$

(٥)

$$i = e^{2000t} - 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ) \text{ amperes}$$

عند  $t = 0$  تصبح المادة (١)  $100t = 250 \sin 0$  أو  $i = 0$  . والآن باستخدام المادة (٥)عند  $t = 0$  نجد أن  $c = -1.22$  إذن

$$i = -1.22 e^{2000t} + 1.955 \cos(500t - 51.3^\circ) = -1.22 e^{2000t} + 1.955 \sin(500t + 38.7^\circ) \text{ amperes}$$

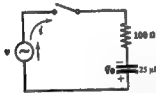
١٦-١٥ في دائرة RC الموضحة في الشكل ١٦-٣١ يؤثر مصدر

جهد جبري  $v = 250 \sin(500t + \phi)$  volts وذلكبفتح المفتاح عند الزمن الذي كانت عنده  $\phi = 45^\circ$  . فلذا

كانت هناك شحنة ابتدائية على المكثف مقدارها

$$q_0 = 5000 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$$

في الرسم فلوجد التيار التام .



شكل ١٦-٣١

الدائرة والجهد الجبري هما نفسهما الموجودان في المسألة ١٦-١٤ لئلا خطأ أن  $\phi = 45^\circ$  . إذن فالمعادلة التفاضلية

في صيغة الموترات هي

(١)

$$(D + 400)i - 1250 \cos(500t + 45^\circ)$$

ولقدالة التسمية هي نفسها كما في المسألة ١٦-١٤ . والتيار الخاص مزاح بزاوية  $45^\circ$  ، أي أن :

$$i_p = 1.955 \sin(500t + 83.7^\circ) \text{ إذن التيار التام هو}$$

(٢)

$$i = e^{2000t} + 1.955 \sin(500t + 83.7^\circ) \text{ amperes}$$

عند  $t = 0$  يوجد مصدران للجهد يرسلان تياراً . الجهد المكافئ للمكثف المشحون هو :

$v = 250 \sin 45^\circ \dots 176.7 \text{ volts}$  . والمصدر له جهد خطي  $V = q/C = (5000 \times 10^{-9})/(25 \times 10^{-9}) = 200 \text{ volts}$   
 وبفحص المعادلة يتبين أيضاً أن كلا الجهدين يأخذ نفس القطبية وعلى ذلك فمن التيارات الابتدائية هو  
 $i = 0$  عند  $t = 3.77$  سم وضع (٢) ولأن استخدام المعادلة (٢) سم وضع (٢) عند  $t = 0$  .  
 نجد أن  $i = 1.83 \text{ amperes}$  والتيار المطلوب هو  $i = 1.83 e^{-4000t} + 1.955 \sin (500t + 83.7^\circ)$

١٦-١ يؤثر على دائرة التحويل المكونة من RLC

والموضحة في شكل ١٦-٢٢ مصدر جهد جيبى  
 $v = 100 \sin (1000t + \phi)$  volts . فرداً أقل  
 المقترح منه الزمن الذى كانت فيه  $\phi = 90^\circ$  ،  
 فلو وجد التيار بفرض أن الشحنة الابتدائية على  
 المكثف تساوى صفراً .



شكل ١٦ - ٢٢

يعد ذلك المعادلة التفاضلية على الصورة

$$50i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{30 \times 10^{-6}} \int i dt = 100 \sin (1000t + 90^\circ)$$

(١)

$$(D_2 + 500D + 2 \times 10^6)i = 10^6 \cos (1000t + 90^\circ)$$

ويطرا المعادلة المميزة لها :

$$D_2 = -250 - j371 \quad \text{و} \quad D_1 = -250 + j371$$

التيار المتصور هو :

$$i_p = e^{-2500t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)$$

والتيار الخاص الذى نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦-١٤ هو :

$$i_p = 1.06 \sin (1000t + 32^\circ)$$

لأن للتيار العام هو :

(٢)

$$i = e^{-2500t} (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t) + 1.06 \sin (1000t + 32^\circ) \text{ amperes}$$

من المعادلة (١) عند  $t = 0$  نجد أن  $i_0 = 0$  و  $di/dt = 1000$  وبالتعويض فى المعادلة (٢) نحصل على

و الآن بظنا من المعادلة (٢) نحصل على :  $c_2 = -0.562$



$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= e^{-200t} (-371c_1 \sin 371t + 371c_2 \cos 371t) \\ (٢) \quad &+ (c_1 \cos 371t + c_2 \sin 371t)(-250 e^{-200t}) + 1.06(1000) \cos(1000t + 32^\circ) \\ \text{وبالتعويض عن } t = 0 \text{ و } c_1 &= -0.562 \text{ و } \frac{di}{dt} = 1000 \text{ في المعادلة (٢) ، نجد أن } c_2 = -0.104 \\ \text{والآن تصبح المعادلة (٢) على الصورة :} \end{aligned}$$

$$i = e^{-200t} (-0.562 \cos 371t - 0.104 \sin 371t) + 1.06 \sin(1000t + 32^\circ) \text{ amperes}$$

١٧-١٦ دائرة توالى تتكون من  $R = 100 \Omega$  ،  $L = 0.1 \text{ H}$  و  $C = 50 \mu\text{F}$  يؤثر عليها مصدر جهد جوى :  $v = 100 \sin(1000t + \phi)$  volts ، فلذا أطلق المفتاح عندما كانت  $\phi = 90^\circ$  ، فأوجد التيار بفرض أن الشحنة الابتدائية على المكثف تساوى صفراً .

متد فلق المفتاح تكون معادلة الدائرة هي :

$$100i + 0.1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{30 \times 10^{-6}} \int i dt = 100 \sin(1000t + 90^\circ)$$

$$(١) \quad (D_2 + 1000D + 2 \times 10^6)i = 10^4 \cos(1000t + 90^\circ)$$

وهل المعادلة المميزة هما  $D_1 = -276.5$  و  $D_2 = -723.5$

والدالة المتكاملة هي :  $i = c_1 e^{-276.5t} + c_2 e^{-723.5t} + 10^4 \cos(1000t + 90^\circ)$  ، والحل الخاص الذى نحصل عليه بالطريقة المعتادة في المسألة ١٦-١٤ هو :  $i_p = 0.781 \sin(1000t + 51.4^\circ)$  . إذن التيار اتمام هو :

$$(٢) \quad i = c_1 e^{-276.5t} + c_2 e^{-723.5t} + 0.781 \sin(1000t + 51.4^\circ) \text{ amperes}$$

لتعيين الثابتين  $c_1$  و  $c_2$  فلنأخذ نحسب  $i$  و  $di/dt$  عند  $t = 0$  في المعادلة (١) . وبالتعويض بالنتيجة  $i_0 = 0$  و  $di/dt = 1000$  في المعادلة (٢) ، نحصل على :

$$(٣) \quad c_1 + c_2 = -0.610 \text{ أو } i_0 = 0 = c_1(1) + c_2(1) + 0.781 \sin 51.4^\circ$$

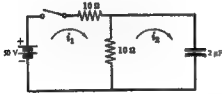
وبتفاضل المعادلة (٢) والتعويض عن  $t = 0$  و  $di/dt = 1000$  نجد أن :

$$(٤) \quad 276.5c_1 + 723.5c_2 = -513 \text{ أو } di/dt = 1000 = -276.5c_1 - 723.5c_2 + 781 \cos 51.4^\circ$$

وبحل المعادلتين الآتيتين (٣) و (٤) نجد أن  $c_1 = 0.161$  و  $c_2 = -0.771$

إذن ،

$$i = 0.161 e^{-276.5t} - 0.771 e^{-723.5t} + 0.781 \sin(1000t + 51.4^\circ) \text{ amperes}$$



شكل ١٦ - ٣٣

١٦-١٨ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٦-١٣ أطلق المفتاح عند  $t = 0$  أوجد تيار الشبكتين العابرتين  $i_2$  و  $i_1$  الموضحين في الشكل وجهد العبور  $v_C$  على المكثف .  
ب تطبيق قانون كيرشوف للجهد على المسارين المتلقتين نحصل على .

$$(١) \quad 2Di_1 = Di_2 \quad \text{أو} \quad 20i_1 - 10i_2 = 50$$

$$(٢) \quad -Di_1 + (D + 5 \times 10^{-6})i_2 = 0 \quad \text{أو} \quad -10i_1 + 10i_2 + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int i_2 dt = 0$$

ونجد من المعادلة (١) أن  $Di_2 = \frac{1}{2}Di_1$  وبالتعويض بها في المعادلة (٢) نحصل على :

$$(٣) \quad (D + 10^{-6})i_2 = 0 \quad \text{أو} \quad (\frac{1}{2}Di_1) + (D + 5 \times 10^{-6})i_2 = 0$$

وبما أن المعادلة (٣) متجانسة فإن حلها يتجوز فقط على الحالة المتسمة .

إذن :

$$i_2 = 5e^{-10^6 t} \text{ amperes}$$

وبوضع  $t = 0$  في المعادلة (٢) نجد أن  $10i_1 - 10i_2 + 10i_2 = 0$  أو  $i_1 = i_2$  . إذن المعادلة (١) عند  $t = 0$  تصبح  $20i_1 - 10i_1 = 50$  أو  $i_1 = i_2 = 5$  . وبالتعويض من قيمة  $i_2$  في المعادلة (٤) نجد أن  $c = 5$  : إذن :

$$(٥) \quad i_2 = 5e^{-10^6 t} \text{ amperes}$$

والآن نحصل على تيار العبور  $i_1$  بالتعويض من (٥) في المعادلة (١) .

إذن :

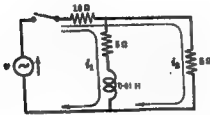
$$i_1 = 2.5 + 2.5e^{-10^6 t} \text{ amperes} \quad \text{و} \quad 20i_1 - 10(5e^{-10^6 t}) = 50$$

ونحصل على جهد العبور  $v_C$  عبر المكثف بتكامل تيار الشبكة الفرعية  $i_2$  .

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_2 dt = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \int 5e^{-10^6 t} dt = 25(1 - e^{-10^6 t}) \text{ volts}$$

١٦-١٩ في الشبكتين الفرعيتين الموضحتين في الشكل ١٦-٣٤ أطلق المفتاح عند  $t = 0$  وكان المصدر الجهد  $v = 150 \sin 1000t$  volts . أوجد تيارات الشبكتين  $i_1$  و  $i_2$  المظنات في الشكل .

ينتج من تطبيق قانون كيرشوف على المسارين  
الموضعين أن :



شكل ١٦ - ٢٤

$$10i_1 + 15i_1 + 0.01 \frac{di_2}{dt} = 150 \sin 1000t$$

أو

$$(1) \quad (D + 1500)i_1 + 1000i_2 = 15,000 \sin 1000t$$

$$(2) \quad 15i_2 + 10i_1 = 150 \sin 1000t$$

$$(3) \quad i_2 = 10 \sin 1000t - \frac{2}{3}i_1 \text{ amperes} \quad \text{من المعادلة (2) نجد أن}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على المعادلة التفاضلية

$$(4) \quad (D + 833)i_1 = 5000 \sin 1000t$$

والحل التام الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المسألة ١٦ - ١٤ هو

$$(5) \quad i_1 = e^{-833t} + 3.84 \sin (1000t - 50.2^\circ) \text{ amperes}$$

والآن بالتعويض عن  $i_1$  في المعادلة (3) نجد

$$i_2 = -\frac{2}{3}e^{-833t} - 2.56 \sin (1000t - 50.2^\circ) + 10 \sin 1000t$$

$$(6) \quad = -\frac{2}{3}e^{-833t} + 8.58 \sin (1000t + 13.25^\circ) \text{ amperes}$$

تيار الشبكية  $i_1$  يمر خلال الملف وعلى ذلك فإنه يساوى صفراً عند  $t = 0$ . وبالتعويض في المعادلة (5) نجد :

$$0 = e^{-833t} + 3.84 \sin (-50.2^\circ) \quad \text{و} \quad e = 2.95 \quad \text{إذن لمعادلتنا تيارى الشبكتين هما :}$$

$$i_2 = -1.97 e^{-833t} + 8.58 \sin (1000t + 13.25^\circ) \text{ amperes} \quad \text{و} \quad i_1 = 2.95 e^{-833t} + 3.84 \sin (1000t - 50.2^\circ) \text{ amperes}$$

### مسائل اضافية

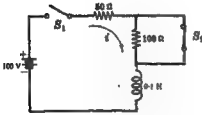
١٦ - ٧٠ في دائرة التوالي المكونة من  $RL$  والموضحة في الشكل

١٦ - ٧٠ . ألق الفتح  $S_1$  عند  $t = 0$  وبعد

4ms فتح الفتح  $S_2$  . أوجد التيار في الفترتين

$0 < t < t'$  و  $t' < t$  حيث  $t' = 4\text{ ms}$  الجواب :

$$i = 2(1 - e^{-500t}) \text{ amperes}, i = 1.06 e^{-1250(t-4\text{ms})} - 0.667 \text{ amperes}$$



شكل ١٦ - ٧٠

١٦ - ٧١ يؤثر جهد ثابت على دائرة توالى من  $RL$  وذلك بفتح

الفتح . وكان الجهد عبر  $L$  هو 25volts عند

$t = 0$  وجهد إلى 5V عند  $t = 25\text{ ms}$  . فإذا

كان  $L = 2\text{ H}$  فاحس قيمة  $R$  ؟

الجواب :  $128.8\ \Omega$

١٦ - ٧٢ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٧٢ ألق الفتح  $S_1$  عند  $t = 0$  وفتح الفتح  $S_2$  عند

$t = 0.2\text{ sec}$  . أوجد معادلة التيار الماهر لمائتين ألفتين .

$$\text{الجواب : } i = 10(1 - e^{-10t}) \text{ amperes}, i = 6.97 e^{-500(t-0.2)} + 1.67 \text{ amperes}$$

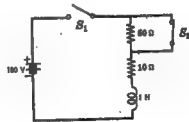
١٦ - ٧٣ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٧٣ ألق الفتح إلى الموضع 1 عند  $t = 0$  ، ثم تحرك إلى الموضع 2

بعد 1ms . أوجد الزمن الذي يغير عنده التيار اتجاهه ويصبح مساوياً للصفر .

الجواب : 1.261 ms



شكل ١٦ - ٧٣



شكل ١٦ - ٧٤

١٦ - ٧٤ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦ - ٧٤ ألق الفتح إلى الموضع 1 لوقت كاف للوصول إلى حالة الاستقرار

في التيار . وعندما تحرك الفتح إلى الموضع 2 كان هناك تيار ماهر يمر في المقاومة  $50\ \Omega$  لفترة زمنية قصيرة .

أوجد الطاقة المستفادة في المقاومة خلال فترة المهور هذه .

الجواب : 8 joules

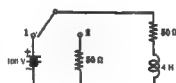
٢٥-١٦ يوجد على مكثف دائرة  $RC$  الموضحة في الشكل ١٦-٢٩ شحنة ابتدائية  $q_0 = 800 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  بالقطبية الموضحة في الرسم . أوجد كلا من تيار وشحنة البور الناتجيتين عند غلق المفتاح .  
الجواب :  $10^{-6} \text{ coulombs}$  ،  $q = 400(1 + e^{-2.5 \times 10^4 t})$  amperes ،  $i = -10e^{-2.5 \times 10^4 t}$



شكل ١٦ - ٤٠



شكل ١٦ - ٣٩



شكل ١٦ - ٢٨

٢٩-١٦ وصل مكثف  $2 \mu F$  وعليه شحنة ابتدائية  $100 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  .  $q_0$  يمر طرف المقاومة  $100 \Omega$  عند  $t = 0$  . أوجد الزمن الذي يجب فيه الجهد العابر عبر المقاومة من 40 إلى 10 V .

الجواب :  $277.4 \mu s$

٢٧-١٦ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦-٤٠ أغلق المفتاح إلى الموضع 1 عند  $t = 0$  ثم تحرك إلى الموضع 2 بعد 1 TC . أوجد تمييز تيار العابر في الفترتين  $0 < t' < 1$  و  $t' < 1$

الجواب :  $0.516e^{-200(t-1)}$  amperes ،  $i = 0.5e^{-200t}$  amperes

٢٨-١٦ بالإشارة إلى المسألة ٢٧-١٦ ، حل المعادلة التفاضلية على أساس الشحنة . من دوال الشحنة العابرة أوجد تمييز التيار ثم قارن النتائج .

٢٩-١٦ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦-٤١ وضع المفتاح في الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى حالة الاستقرار ثم تحرك بعد ذلك إلى الموضع 2 . يمر تيار عابر عند تحريك المفتاح إلى الموضع 2 وينتج عن ذلك استقضاء طاقة في المقاومتين . أوجد هذه الطاقة وقارنها بالطاقة المخزونة في المكثف بعد تحريك المفتاح .

الجواب : 0.20 joules

٣٠-١٦ في الدائرة الموضحة في الشكل ١٦-٤٢ كان على المكثف  $C_1$  شحنة ابتدائية  $q_0 = 300 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  . لذا أغلق المفتاح عند  $t = 0$  فأوجد التيار العابر والشحنة العابرة والجهد النهائي على المكثف  $C_1$  .

الجواب :  $33.3 \text{ V}$  ،  $q = 200(1 + 0.5e^{-2.5 \times 10^4 t}) \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  ،  $i = 2.5e^{-2.5 \times 10^4 t}$  amperes

٣١-١٦ بالإشارة إلى المسألة ٣٠-١٦ ، أوجد الجهود العابرة  $V_{C_1}$  و  $V_{C_2}$  و  $V_R$  ثم بين أن مجموعهم يساوي صفراً .  
الجواب :

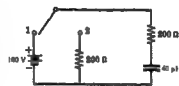
$$v_{C_1} = 33.3 + 16.7e^{-2.5 \times 10^4 t} \text{ volts}, v_{C_2} = 33.3(1 - e^{-2.5 \times 10^4 t}) \text{ volts}, v_R = -50e^{-2.5 \times 10^4 t} \text{ volts}$$



شكل ١٦ - ٢٣



شكل ١٦ - ٢٤



شكل ١٦ - ٢٥

١٦-٢٣ في دائرة التوال  $RC$  الموضحة في الشكل ١٦-٢٣، كان على المكثف شحنة ابتدائية  $q_0$  وأغلق المفتاح عند  $t = 0$ . أوجد  $q_0$  علماً بأن قدرة البيور في المقاومة هي  $p_R = 360e^{-10t}$  watts

الجواب :  $120 \times 10^{-6}$  coulombs

١٦-٢٣ دائرة توال تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 200 \Omega$  و  $L = 0.1 H$  و  $C = 100 \mu F$ . يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 200$  volts عند  $t = 0$ . أوجد التيار بفرض أنه لا توجد شحنة ابتدائية على المكثف.

الجواب :  $i = 1.055e^{-300t} - 1.055e^{-1000t}$  amperes

١٦-٢٤ دائرة توال تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 200 \Omega$  و  $L = 0.1 H$  و  $C = 10 \mu F$ . فإذا اختيرت قيمة سعة المكثف بحيث تصبح البادئة في حالة تقاضول خرج ، فأوجد قيمة  $C$  المطلوبة.

الجواب :  $10 \mu F$

١٦-٢٥ أوجد الأذبلة الطبيعية لدائرة التوال  $RLC$  التي فيها  $R = 200 \Omega$  و  $L = 0.1 H$  و  $C = 5 \mu F$ .

الجواب :  $1000 \text{ rad/s}$

١٦-٢٦ دائرة توال تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.1 H$  و  $C = 500 \mu F$ . يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 10$  volts عند  $t = 0$ . أوجد التيار العابر الناتج.

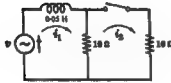
الجواب :  $i = 0.72 e^{-20t} \sin 139t$  amperes

١٦-٢٧ دائرة توال تتكون من  $RL$  فيها  $R = 300 \Omega$  و  $L = 1.0 H$ . يؤثر عليها جهد جيبية  $v = 100 \cos(100t + \phi)$  volts. فإذا أُلغى المفتاح عندما كانت  $\phi = 45^\circ$  ، فأوجد التيار العابر الناتج.

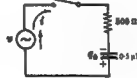
الجواب :  $i = -0.282e^{-300t} + 0.316 \cos(100t + 26.6^\circ)$  amperes

١٦-٢٨ تمل دائرة  $RL$  الموضحة في الشكل ١٦-٢٤ في حالة جيبية والمفتاح في الموضع 1. فإذا تحرك المفتاح إلى الموضع 2 عندما كان مصدر الجهد  $v = 100 \cos(100t + 45^\circ)$  volts. فأوجد التيار العابر وارسم آخر نصف دورة في الحالة المستقرة مع الفترة العابرة لتوضيح البيور.

الجواب :  $i = 0.282e^{-300t}$  amperes



شكل ١٦ - ٤٦



شكل ١٦ - ٤٥



شكل ١٦ - ٤٤

١٦-٣٩ في دائرة التوالى المكونة من  $RC$  والموضحة في الشكل ١٦-٤٥ كان حل المكثف لحظة ابتدائية

بالقطبية الموجبة في الرسم . فإذا أثر جهد جوى  $q_0 = 25 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$

، فأوجد التيار العابر .  $v = 100 \sin(1000t + \phi) \text{ volts}$  على الدائرة عند الزمن الذى كانت عنده  $\phi = 30^\circ$  ،

الجواب :  $i = 0.1535 e^{-4 \times 10^3 t} + 0.0484 \sin(1000t + 106^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٥ بالإشارة إلى المسألة ١٦-٣٩ ، ما هي الشحنة الابتدائية التى يجب تواجدها على المكثف بحيث يلعب التيار مباشرة

إلى الحالة المستقرة بدون فترة عابرة وذلك عند فلق المفتاح ؟

الجواب :  $13.37 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  + عند الفتح العلوى .

١٦-٤٩ بين أن لدائرة التوالى  $RLC$  ذات المصغر  $v = V_{\max} \sin(\omega t + \phi)$  حل خاص لمعادلتها التفاضلية

يعطى بالعلاقة

$$i_p = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C - \omega L)^2}} \sin(\omega t + \phi + \tan^{-1} \frac{1/\omega C - \omega L}{R})$$

١٦-٤٢ دائرة توالى تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.1 \text{ H}$  و  $C = 500 \mu\text{F}$  . يؤثر عليها جهد جوى

$v = 100 \sin(250t + \phi) \text{ volts}$  عند الزمن الذى كانت عنده  $\phi = 0^\circ$  . أوجد التيار الناتج .

الجواب :  $i = e^{-25t} (5.42 \cos 139t - 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin(250t - 73.6^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٣ دائرة توالى تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 200 \Omega$  و  $L = 0.5 \text{ H}$  و  $C = 100 \mu\text{F}$  . يؤثر عليها جهد

جوى  $v = 300 \sin(500t + \phi) \text{ volts}$  . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت  $\phi = 30^\circ$  ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب :  $i = 0.517 e^{-245.4t} - 0.197 e^{-245.4t} + 0.983 \sin(500t - 19^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٤ دائرة توالى تتكون من  $RLC$  فيها  $R = 50 \Omega$  و  $L = 0.1 \text{ H}$  و  $C = 50 \mu\text{F}$  . يؤثر عليها جهد جوى

$v = 100 \sin(500t + \phi) \text{ volts}$  . فإذا أغلق المفتاح عندما كانت  $\phi = 45^\circ$  ، فأوجد التيار الناتج .

الجواب :  $i = e^{-200t} (-1.09 \cos 371t - 1.025 \sin 371t) + 1.96 \sin(500t + 33.7^\circ) \text{ amperes}$

١٦-٤٥ في الشبكة الكهربائية المكونة من شبكتين فرعيتين والموضحة في الشكل ١٦-٤٦ يعطى مصدر الجهد في الشبكة ١

بالسلطة volts.  $v = 100 \sin(200t - \phi)$  أوجد تيارى البور  $i_1$  و  $i_2$  في الشبكتين إذا أُغلق المفتاح عندما

كانت  $\phi = 0$ .

الجواب :

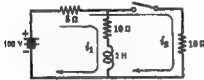
$i_1 = 3.01e^{-100t} - 8.96 \sin(200t - 63.4^\circ)$  amperes,  $i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4^\circ)$  amperes  
١٦-٤٦ أوجد في الشبكتين الفرعيتين الموضحتين في الشكل ١٦-٤٧ تيارى الشبكتين  $i_1$  و  $i_2$  عندما يغلَق المفتاح عند

$t = 0$ .

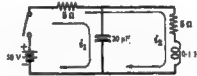
الجواب :  $i_1 = 0.101e^{-100t} + 9.899e^{-9999t}$  amperes,  $i_2 = -5.05e^{-100t} + 5 + 0.05e^{-9999t}$  amperes

١٧-٤٧ إذا أُغلق المفتاح في الشبكتين الفرعيتين الموضحتين في الشكل ١٦-٤٨ عند  $t = 0$  فأوجد التيارين الناتجين  $i_1$  و  $i_2$ .

الجواب :  $i_1 = 1.67e^{-0.07t} + 5$  amperes,  $i_2 = -0.555e^{-0.07t} + 5$  amperes



شكل ١٦ - ٤٨



شكل ١٦ - ٤٧



## الفصل السابع عشر

### دراسة الظواهر العابرة بطريقة تحويل لابلاس

#### مقدمة :

سلطنا في الفصل السادس عشر التيارات العابرة في الدوائر الكهربائية التي تحتوي على عناصر مخازنة الطاقة . وقد نتج عن تطبيق قوانين كيرشوف على هذه الدوائر معادلة تفاضلية أو أكثر بدلالة الزمن ، وذلك حسب تركيب الدائرة . وقد حلت هذه المعادلات بالطرق التقليدية . ولكن هذه الطرق في حالات كثيرة تكون غير مرضية وعلى ذلك فلنأخذ نمثل في هذا الفصل طريقة أخرى تسمى طريقة تحويل لابلاس ، وهي تمكننا من حل المعادلات التفاضلية بطريقة أكثر مباشرة ، وعلاوة على ذلك فإن بعض الدوائر غير المنتظمة لا يمكن حلها بسهولة بالطرق التقليدية بينما تمطينا طريقة لابلاس حلاً لهذه المسائل .

يحتوي هذا الفصل فقط على التطبيقات الأساسية لطريقة تحويل لابلاس . وقد تركنا جانباً اشتقاق الصيغ الرياضية والتطبيقات الأكثر تعقيداً ويمكن الرجوع إليها في المراجع المختصة بتحليل فترات البؤور .

#### تحويل لابلاس :

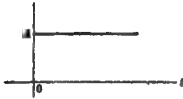
إذا كانت  $f(t)$  دالة من الزمن  $t$  ومعرفة لجميع قيم  $t > 0$  فإن تحويل لابلاس لدالة  $f(t)$  يرمز له بالرمز  $\mathcal{L}[f(t)]$  ويعرف بـ

$$(1) \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

حيث يمكن أن يكون البارامتر  $s$  حقيقياً أو مركباً . ونفرض في تطبيقات الدوائر الكهربائية أن  $s = \sigma + j\omega$  . ويحول المؤثر  $\mathcal{L}[f(t)]$  الدالة  $f(t)$  بدلالة الزمن إلى دالة  $F(s)$  بدلالة التردد المركبة أو ببساطة بدلالة  $s$  . وعلى هذا فإن الدالتين  $f(t)$  و  $F(s)$  يكونان زوجاً من البدائل أو المتحولات . ويوجد جداول واسعة الانتشار تحتوي على هذه الأزواج . والمتحولات المبينة في الجداول ١٧ - ١ كافية للفرص المطلوب في هذا الفصل . والشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس هو أن الدالة  $f(t)$  يجب أن تكون (أ) قطعة متصلة ، (ب) ذات رتبة أسية . تكون الدالة  $f(t)$  ذات رتبة أسية إذا كان  $|f(t)| < A e^{\alpha t}$  لجميع قيم  $t > t_0$  حيث كل من  $A$  و  $t_0$  ثوابت موجبة . عندما تتحقق هذه الشروط فإن تكامل التحويل المباشر يكون مقارباً لجميع قيم  $\sigma > \alpha$  وتكون  $F(s)$  موجودة . وجميع الدوال المستخدمة في تحليل الدوائر الكهربائية تحقق الشرطين (أ) ، (ب) .

مثال ١ :

تسمى الدالة الموضحة في الشكل ١٧ - ١ بدالة سلمية وتعرف  
بـ :  $f(t) = A$  ،  $t > 0$  : أوجد تحويلات لابلاس المناظرة .



شكل ١٧ - ١

بتطبيق المادة (١) على الدالة  $f(t) = A$  نجد أن

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = \left[ -\frac{A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

مثال ٢ :

أوجد تحويل لابلاس لدالة  $f(t) = e^{-at}$  حيث  $a$  ثابت .

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \left[ -\frac{1}{(a+s)} e^{-(a+s)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+s}$$

مثال ٣ :

أوجد تحويل لابلاس لدالة  $f(t) = \sin at$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \int_0^{\infty} \sin at e^{-st} dt = \left[ \frac{-a(\sin at)e^{-st} - e^{-st} \cos at}{s^2 + a^2} \right]_0^{\infty} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

مثال ٤ :

أوجد تحويل لابلاس لـ  $df/dt$

$$\mathcal{L}[df/dt] = \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئة  $\int u dv = uv - \int v du$  حيث  $u = e^{-st}$  ،  $dv = df$  ،  $v = f$  إذن .

$$\mathcal{L}[df/dt] = \left[ e^{-st} f \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(-se^{-st}) dt = -f(0+) + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt = -f(0+) + s \mathcal{L}[f]$$

حيث  $f(0+)$  هي قيمة الدالة عند الاقتراب من 0 من ناحية اليمين ، أي أن قيمة الدالة عند  $t = (0+)$  .

مثال ٥ :

أوجد تحويل لابلاس لتكامل  $\int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \int_0^{\infty} \int_0^t f(\tau) d\tau e^{-st} dt$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة مع وضع  $de = e^{-s} ds$  و  $u = \int f(t) dt$  إذن

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] &= \left[\int f(t) dt \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f(t) dt \Big|_{0+} + \frac{1}{s} \mathcal{W}(s) \end{aligned}$$

حيث  $\int_0^{\infty} f(t) dt \Big|_{0+}$  هي قيمة التكامل عند  $0+$  وتكتب أيضاً  $f^{-1}(0+)$ . إذن تحويل لابلاس لتكامل هو

$$\mathcal{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{W}(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0+)$$

ويظهر زوج التحويل أو البدائل الذي حصلنا عليه في هذا المثال في الجدول ١٧ - ١.

### تطبيقات على تحليل التوافر :

في دائرة التوال  $RC$  الموضحة في الشكل ١٧ - ٢ توجد شحنة ابتدائية  $q_0$  على المكثف بالتطبيق الموضحة في الرسم . عند غلق المفتاح يؤثر مصدر الجهد الثابت  $V$  على الدائرة وتكون المعادلة التفاضلية للدائرة هي :

$$RI + \frac{1}{C} \int i dt = V \quad (٢)$$

ولنستخدم  $I(s)$  كمتغير عن التيار في نطاق  $s$  ونأخذ تحويل لابلاس لكل حد في المعادلة (٢)

$$\mathcal{L}[RI] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{C} \int i dt\right] = \mathcal{L}[V] \quad (٣)$$



شكل ١٧ - ٢

$$RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{f^{-1}(0+)}{Cs} = \frac{V}{s} \quad (٤)$$

لدينا الآن  $f^{-1}(0+) = \int_0^{\infty} dt \Big|_{0+} = q(0+) = q_0$  الشحنة الابتدائية  $q_0$  موجبة على ألوح المكثف المتولى للمكثف وهي نفس كمية الشحنة المترسبة بالمصدر  $V$ . إذن الإشارة موجبة . وبالتعويض عن  $q_0$  في المعادلة (٤) نحصل على

$$RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + \frac{q_0}{Cs} = \frac{V}{s} \quad (٥)$$

وبإعادة ترتيب الحدود وأخذ  $I(s)$  مشترك .

جدول ١٧ - ١

نحويلات لابلاس

	$f(t)$	$F(s)$
1.	$A \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s}$
2.	$At \quad t \geq 0$	$\frac{A}{s^2}$
3.	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
4.	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7.	$\sin (\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
8.	$\cos (\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
12.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
13.	$df/dt$	$sF(s) - f(0+)$
14.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0+)}{s}$
15.	$f(t - t_1)$	$e^{-st_1} F(s)$
16.	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$

$$(٦) \quad I(s) \left( R + \frac{1}{Cs} \right) = \frac{V}{s} - \frac{q_0}{Cs}$$

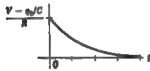
$$(٧) \quad I(s) = \frac{1}{s} (V - q_0/C) \frac{1}{(R + 1/sC)} = \frac{V - q_0/C}{R} \frac{1}{(s + 1/RC)}$$

المعادلة (٧) التي في نطاق  $s$  معادلة متغيرة التيار  $i$  في نطاق الزمن. وبالتالي فإن عملية تحويل  $F(s)$  إلى  $f(t)$  تسمى معكوس تحويل لابلاس، ويرمز لها بالرمز  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  بالإشارة إلى الجدول ١٧ - ١. نلاحظ أن  $F(s)$  لتحويل الزوج 3 تكافئ الحد  $1/(s + 1/RC)$  في المعادلة (٧). إذن من تعريف معكوس تحويل لابلاس ومن الجدول نحصل على :

$$(٨) \quad \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \left( \frac{V - q_0/C}{R} \right) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1/RC} \right] = \frac{V - q_0/C}{R} e^{-t/RC}$$

المعادلة (٨) هي التيار العابر في نطاق الزمن الذي ينتج عن غلق مفتاح دائرة  $RC$  التي تحتوي على شحنة ابتدائية  $q_0$  على المكثف. وقد أدخلت الشروط الابتدائية في المعادلة (٨) في نطاق  $s$ ، وبالتالي عند أخذ معكوس التحويل فإن المعادلة الناتجة تكون بحوية على الثوابت.

لاحظ أنه بالطريقة الجبرية التي استخدمت في كتابة المعادلتين (٦) و (٧) أمكن تحويل الدالة إلى صيغة موجودة في الجدول ومن ذلك تمكنا من الحصول على تحويل لابلاس الماكس. يوضح الشكل ١٧ - ٣ دالة الزمنية بالتيار الابتدائي  $(V - q_0/C)/R$  وإذا كان  $q_0/C = V$  فإنه لا يوجد فترة عبور ذلك لأن الشحنة الابتدائية على المكثف يكون جهدها المكافئ مساوياً للجهود المؤثر  $V$ . وإذا كانت قطبية  $q_0$  معكوسة فإن إشارة  $q_0/C$  تتغير وينتج عن ذلك تيار ابتدائي كبير نسبياً.



شكل ١٧ - ٣

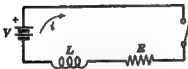
يؤثر على دائرة  $RL$  الموضحة في الشكل ١٧ - ٤ مصدر جهد ثابت  $V$  عند غلق المفتاح. ينتج من تطبيق قانون كيرشوف بعد غلق المفتاح المعادلة التالية :

$$(٩) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = V$$

والآن بتطبيق تحويل لابلاس مباشرة على كل حد نحصل على :

$$(١٠) \quad \mathcal{L}[Ri] + \mathcal{L}\left[L \frac{di}{dt}\right] = \mathcal{L}[V]$$

$$(١١) \quad RI(s) + sLI(s) - Li(0+) = V/s$$



شكل ١٧ - ٤

التيار الابتدائي  $i(0+)$  في دائرة الثرالى  $RL$  والذي كان لما تيار مساو للصفر قبل غلق المفتاح يساوى أيضاً صفراً عند  $t = 0+$  . بالتعويض عن  $i(0+) = 0$  في المعادلة (١١) نحصل على :

$$(12) \quad I(s)(R + sL) = V/s$$

$$(13) \quad I(s) = \frac{V}{s} \frac{1}{(R + sL)} = \frac{V}{L} \left( \frac{1}{s} \right) \frac{1}{(s + R/L)}$$

لا تظهر حالة المعادلة (١٣) في الجدول ١٧ - ١ ، ولكن إذا أمكن تغييرها إلى الصيغة  $A/s + B/(s + R/L)$  فإنه يمكن استخدام تحويل الزوج 3 و 1 في جزئ هذه الصيغة ، ويمثل الزوج 16 أن الدالة الزمنية الكلية هي مجموع الدالتين الزمئيتين ، أى أن  $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) + F_2(s)] = f_1(t) + f_2(t)$  . للحصول على المجموع المطلوب فإننا نضع الطرف الأيمن للمعادلة (١٣) باستثناء الثابت  $V/L$  مساوياً لمجموع كسرين كما يلي :

$$(14) \quad \frac{1}{s(s + R/L)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + R/L)} = \frac{A(s + R/L) + Bs}{s(s + R/L)}$$

والآن من البسط نحصل على المعادلة التالية في  $s$  :

$$(15) \quad 1 = (A+B)s + AR/L$$

بمضاد معاملات  $s$  ذات القوة المتساوية نحصل على :

$$(16) \quad A + B = 0, \quad A = L/R, \quad B = -L/R$$

باستخدام الكسور الجزئية الموفقة واختيار  $A$  و  $B$  المئين سابقاً فإن المعادلة (١٣) تصبح :

$$(17) \quad I(s) = \frac{V}{L} \left( \frac{L/R}{s} + \frac{-L/R}{s + R/L} \right) = \frac{V}{R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

بتطبيق التحويلين 1 و 3 في الجدول ١٧ - ١ نحصل على تعريض مبركوس التحويل للتيار .

إذاً :

$$(18) \quad \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \frac{V}{R} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + R/L} \right] \right\}$$

$$(19) \quad i = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t})$$

المعادلة (١٩) هي المعادلة الأسية المتعادلة وقيمة التيار في الحالة المستقرة هي  $V/R$  .

## طرق الفك :

عادة ما نحتاج إلى فك خارج القسمة في تحليل الدوائر الكهربائية إلى مجموع عدة كسور وذلك للحصول على معكوس تحويلات لابلاس . وذلك لأن التيار في نظام  $\mathcal{L}$  عادة ما يكون نسبة بين كثيرتي حدود في  $s$

$$(٢٠) \quad I(s) = P(s)/Q(s)$$

حيث درجة  $Q(s)$  أعلى من  $P(s)$  . والمعادلة (١٤) توضح مثالا لك خارج القسمة .

نختبر الآن طريقة فك الكسور الجزئية لحالات مختلفة كذلك التي تحدث في فك خارج قسمة كثيرتي حدود . توجد طريقة أخرى نوردتها فيما يلي تسمى طريقة مفكوك هيليسيد وينتج من تطبيقاتها طرق مختلفة لحساب معكوس تحويل لابلاس لخارج قسمة كثيرتي حدود .

## ١ - طريقة مفكوك الكسور الجزئية :

يمكن كتابة المعادلة (٢٠) كمجموع كسور مقام كل منها هو أحد عوامل  $Q(s)$  وبسطها ثابت . ولذلك خارج القسمة  $P(s)/Q(s)$  فإننا يجب أن نعتبر جطور  $Q(s)$  . وهذه إما أن تكون حقيقية أو مركبة ولذلك فإنه ينتج لدينا ثلاث حالات .

الحالة ١ - جطور  $Q(s)$  حقيقية وغير متساوية .

اعتبر أن التيار في نظام  $s$  يعطى بالصيغة التالية :

$$(٢١) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^2+8s+2}$$

بتحليل  $Q(s)$  فإنه يمكن كتابة المعادلة (٢١) على الصورة :

$$(٢٢) \quad I(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

وعندما  $s = -2$  و  $s = -1$  فإن التعبير يصبح غير محدد ويقال أنه يوجد أقطاب بسيطة عند هذه القيم لـ  $s$  ويعطى معامل القطب البسيط  $s = s_0$  بالعلاقة  $\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) I(s) = A$  . وعلى ذلك فلتعين للمعامل ضرب كلا طرفي المعادلة (٢٢) في  $(s+2)$  :

$$(٢٣) \quad \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}(s+2) = A + \frac{B}{(s+1)}(s+2)$$

بالتعويض عن  $s = -2$  نجد أن :

$$A = \left. \frac{s-1}{s+1} \right|_{s=-2} = 3$$

بالشكل :

$$B = \frac{s-1}{s+2} \Big|_{s=-1} = -2$$

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٢) يتكون التيار في نطاق  $s$  هو

$$(٢٤) \quad I(s) = \frac{8}{s+2} + \frac{-2}{s+1}$$

معكوس تحويل لابلاس لـ  $I(s)$  الذي نحصل عليه من الجدول ١٧ - ١ هو :

$$i = 8e^{-2t} - 2e^{-t}$$

**طريقة أخرى :** بتعويض طرق المعادلة (٢٢) في  $(s+2)(s+1)$  نحصل على :

$$s-1 = A(s+1) + B(s+2) = (A+B)s + A+2B$$

والآن بمساواة معاملات  $s$  ذات القوى المتساوية نجد أن  $A+B=1$  و  $A+2B=-1$  إذن  $A=3$  و  $B=-2$  . ومن نفس التعم التي حصلنا عليها سابقاً . هذه الطريقة الأخرى تؤدي إلى معادلات آلية يجب حلها للحصول على المعاملات المطلوبة ، بينما تؤدي الطريقة الأولى إلى معادلات بسيطة مستقلة لكل معامل .

**المثال ٢ :** تطور  $Q(s)$  حقيقية ومتساوية .

اعتبر أن التيار في نطاق  $s$  يعطى بالمعادلة :

$$(٢٥) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+8s+9)} = \frac{1}{s(s+3)^2}$$

إذن :

$$(٢٦) \quad \frac{1}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}$$

بتعويض طرق المعادلة (٢٦) في  $s$  ووضع  $s$  تساوي صفراً

$$A = \frac{1}{(s+3)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{9}$$

وفي حالة الجذور المتكررة فإن معاملات المعادلة التربيعية تعطى بالعلاقة :  $I(s)(s-s_0)^k \Big|_{s=s_0}$  إذن :

$$C = \frac{1}{s} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{3}$$



ومعامل الحد الأعلى الموافق يعطى بالمعادلة :  $\frac{d}{ds} [I(s)(s-s_0)^2] \Big|_{s=s_0}$  ، إذن :

$$B = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=-3} = -\frac{1}{9}$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٦) فإن التيار في لطاق  $s$  يكون :

$$(٢٧) \quad I(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s+3} - \frac{\frac{1}{9}}{(s+3)^2}$$

ويمكن تحويل لابلاس هو :  $i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{9}te^{-3t}$

**طريقة أخرى :** بضرب طرفي المعادلة (٢٦) في  $s(s+3)^2$  نحصل على :

$$1 = A(s+3)^2 + Bs(s+3) + Cs = (A+B)s^2 + (6A+3B+C)s + 9A$$

وبمقارنة معاملات  $s$  ذات القوى المتساوية نجد أن  $A+B=0$  و  $6A+3B+C=0$  و  $9A=1$  ، إذن  $A = \frac{1}{9}$  ،  $B = -\frac{1}{9}$  ،  $C = -\frac{2}{3}$  وهي نفس النتائج التي حصلنا عليها سابقاً .

**المسألة ٣ :** جطور  $Q(s)$  مركبة :

احتر أن التيار في لطاق  $s$  يعطى بالمعادلة :

$$(٢٨) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)}$$

بما أن  $Q(s)$  لها جطور مترافقة فإن التوابت في بسط الكسور الجزئية هي أيضاً مترافقة مركبة .

إذن :

$$(٢٩) \quad \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{A}{s+2+j} + \frac{A^*}{s+2-j}$$

بضرب طرفي المعادلة (٢٩) في  $(s+2+j)$  ونضع  $s = -2-j$  نحصل على :

$$A^* = -j\frac{1}{2} \text{ و } A = \frac{1}{s+2-j} \Big|_{s=-2-j} = j\frac{1}{2}$$

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة (٢٩) يكون التيار في لطاق  $s$  هو

$$(٢٠) \quad I(s) = \frac{j\frac{1}{2}}{s+2+j} + \frac{-j\frac{1}{2}}{s+2-j}$$

ويمكن تحويل لابلاس هو :  $i = e^{-2t} \sin t$

طريقة أخرى : بفرض طرفي المعادلة (٢٩) في  $(s+2-f)(s+2+f)$  نحصل على :

$$1 = A(s+2-f) + A^*(s+2+f)$$

وبمساواة معاملات  $s$  ذات القوى المتساوية نجد أن  $A + A^* = 0$  و  $A(2-f) + A^*(2+f) = 1$

$$\text{إذن : } A = -\frac{1}{4} \text{ و } A^* = \frac{1}{4}$$

٢ — صيغة مفكوك هيلفريد :

نص صيغة مفكوك هيلفريد على أن معكوس تحويل لابلاس يُخرج القسمة  $I(s) = P(s)/Q(s)$  يعطى بالملاحة :

$$(٢١) \quad \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$$

حيث  $a_k$  هي جذور  $Q(s)$  ≠ المتباعدة .

نطبق الآن صيغة مفكوك هيلفريد على التيار بدلالة  $s$  المعطى في الحالة السابقة :

$$(٢٢) \quad I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-1}{s^3+8s+8} = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)}$$

لدينا الآن  $P(s) = s-1$  و  $Q(s) = s^3+8s+8$  و  $O'(s) = 3s^2+8$  والجذران هما  $a_1 = -2$  و  $a_2 = -1$  إذن من المعادلة (٢١) نجد أن :

$$i = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(-2)}{Q'(-2)} e^{-2t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)} e^{-t} = \frac{-8}{-1} e^{-2t} + \frac{-2}{1} e^{-t} = 8e^{-2t} - 2e^{-t}$$

نظرية القيمة الابتدائية :

١٠٠٠ من المثال ٤

$$(٢٣) \quad \mathcal{L} [df/dt] = \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

بأخذ النهاية للمعادلة (٢٣) عندما  $s \rightarrow \infty$  نحصل على :

$$(٢٤) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0+))$$

يحتوى التكامل على  $e^{-st}$  الذى يقترب من الصفر عندما  $s \rightarrow \infty$  . إذن :

$$(٢٥) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (sF(s) - f(0+)) = 0$$

ما أن  $f(0+)$  ثابتة فإنه يمكننا كتابة (٢٥) على الصورة :

$$(٢٦) \quad f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s F(s))$$

المعادلة (٢٦) هي نفس نظرية القيمة الابتدائية . وعلى هذا فإنه يمكننا إيجاد القيمة الابتدائية لدالة الزمن  $f(t)$  بضرب الدالة المتناظرة في نطاق  $F(s)$  في  $s$  وأخذ النهاية عندما  $s \rightarrow \infty$  .

مثال ٦ :

في دائرة  $RC$  الموضحة في الشكل ١٧-٢ إذا كان التيار بدلالة  $s$  هو  $R(s) = \frac{V - q_0/C}{R} \left( \frac{1}{(s + 1/RC)} \right)$  [ أنظر المعادلة (٧) ] فإن التيار الابتدائي  $i(0+)$  باستخدام نظرية القيمة الابتدائية .

من المعادلة (٢٦) نجد أن :

$$i(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{V - q_0/C}{R} \left( \frac{s}{(s + 1/RC)} \right) \right\} = \frac{V - q_0/C}{R}$$

وهذه النتيجة موضحة في الشكل ١٧-٣ .

نظرية القيمة النهائية :

لدينا من المثال ٤

$$(٢٧) \quad \mathcal{L} [df/dt] = \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt = s F(s) - f(0+)$$

وبأخذ النهاية للمعادلة (٢٧) عندما  $s \rightarrow 0$  نحصل على :

$$(٢٨) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \{ s F(s) - f(0+) \}$$

وبما أن :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} (df/dt) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df = f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} f(0+) = f(0+)$$

فإن المعادلة (٣٨) تصبح :

$$f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{s \rightarrow 0} \{s F(s)\}$$

أو

$$(٤٠) \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s F(s)\}$$

المعادلة (٤٠) هي نص نظرية القيمة النهائية . وبالتشابه مع التطبيق لنظرية القيمة الابتدائية يمكننا إيجاد القيمة النهائية لدالة الزمن  $f(t)$  بضرب الدالة المناظرة بدلالة  $s$  أى  $F(s)$  في  $s$  وأخذ النهاية عندما  $s \rightarrow 0$  . ومع ذلك فإن المساعدة (٤٠) تطبق فقط عندما تكون جميع جذور مقام  $F(s)$  لها أجزاء حقيقية سالبة . وهذا الشرط يستبعد الدوال الجيبية لأن الدالة الجيبية محددة في مالا نهائية .

مثال ٧ :

في دائرة  $RL$  الموضحة في شكل ١٧-٤ إذا كان التيار في نطاق  $s$  هو  $R(s) = \frac{V}{R} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right\}$  [ انظر المعادلة (١٧) ] فحين القيمة النهائية للتيار .

من المعادلة (٤٠) نجد أن :

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V}{R} \left\{ \frac{s}{s} - \frac{s}{s + R/L} \right\} = V/R$$

نوالر نطاق  $s$  :

معادلة دائرة التوال  $RLC$  الموضحة في الشكل ١٧-٥ هي :

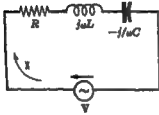
$$(٤١) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = v$$

وقد حلت هذه المعادلة التكاملية - التفاضلية في الفصل السادس مفر بالطرق التقليدية .

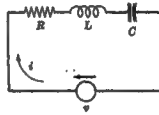
في الحالة الجيبية المستمرة يكون لمعادلة التلا  $R$  و  $L$  و  $C$  معاملات مركبة تعطى بدلالة  $\omega$  ، وتعرف بـ  $R$  و  $j\omega L$  و  $1/j\omega C$  حل الترتيب . وحل هذا فإن معادلة الدائرة تتحول من نطاق الزمن إلى نطاق التردد ، وبهذا التحويل تصبح الجهود والتيارات مطورة . والآن فإن معادلة دائرة التوال  $RLC$  الموضحة في الشكل ١٧-٦ هي :

$$(٤٢) \quad RI + j\omega LI + (1/j\omega C)I = V$$

والميزة التي نحصل عليها من هذا التحويل هي أنه يمكن معالجة المادة المبردة جبرياً للحصول على التيار المطاوع  $I$  . والمربوط في الجهد المختلطة هي ببساطة حاصل ضرب التيار المطاوع في معاوقة عنصر الدائرة .

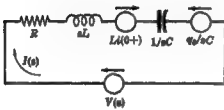


شكل ١٧ - ٦



شكل ١٧ - ٨

يخرج من طريقة تحويل لابلاس لتحويل المربوط في الجهد  $R \neq$  في نطاق الزمن إلى  $RI(s)$  في نطاق  $s$  . وبالمثل فإن الجهد عبر  $sL R(s) - L i(0+)$  يصبح  $L(di/dt)$  والجهد عبر مكثف ما  $q_0/sC$



شكل ١٧ - ٧

$$\frac{1}{sC} I(s) + \frac{q_0}{sC} \text{ يصبح } \frac{1}{C} \int i dt$$

إذن بمساواة دائرة التوالى الموضحة في الشكل ١٧ - ٧ تكون :

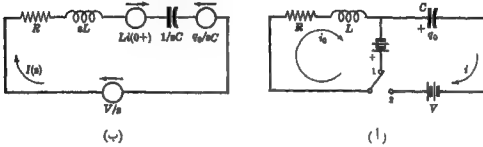
$$(13) \quad RI(s) + sL I(s) - L i(0+) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{q_0}{sC} = V(s)$$

١،

$$(14) \quad I(s)(R + sL + 1/sC) = V(s) - q_0/sC + L i(0+)$$

في المادة (١٤) ،  $R + sL + 1/sC$  هي المعاوقة  $Z(s)$  في نطاق  $s$  ؛ وهي النسبة بين الإثارة إلى الاستجابة . تأخذ  $Z(s)$  نفس شكل المعاوقة المركبة لمعاوقة الجيبية المستقرة ،  $R + j\omega L + 1/j\omega C$  . ويمكن تطبيق معادلات طريقة كل من تيار التثبيت وجهد المقننة في التحليل ببساطة على الدوائر بدلالة  $s$  طالما أن الإشارات السلبية قد استخدمت في مدى الشرط الابتدائي  $L i(0+)$  و  $q_0/sC$  .

اعتبر الدائرة الموضحة في الشكل ١٧ - ٨ (أ) والتي يمر فيها تيار ابتدائي  $q_0$  بينما كان المفتاح في الموضع 1 . عند  $t = 0$  يتحرك المفتاح إلى الموضع 2 وبذلك يدخل إلى الدائرة مصدر جهد ثابت  $V$  ومكثف ذات شحنة ابتدائية  $q_0$  . ولقد اختير الاتجاه الموجب للتيار المقروء في اتجاه عقارب الساعة ، كما هو موضح بالرسم .



شكل ١٧ - ٨

الآن يحول المصدر الثابت إلى  $V/s$  والتيار الناتج إلى  $I(s)$  كما هو موضح في الشكل ١٧ - ٨ (ب). حدود الشرط الابتدائي الآن هي مصادر اتجاهها كما هو موضح وتكون المعادلة المناظرة مطابقة لمعادلة (٤). ولتبار ابتدائي  $i_0$  في عكس الاتجاه أو شحنة  $q_0$  بإشارة معاكسة فإن إشارات الحدين  $L i(0+)$  و  $q_0/sC$  تتغير بالتالي. والأشلة الآتية توضح كيف أن المعادلات في نطاق  $s$  مشابهة لمعادلات المطاوعة التي سبق علاجها في هذا الكتاب. وجميع نظريات الشبكات الكهربائية التي تطبق على الحالة الجيبية المستمرة لها ما يقابلها في نطاق  $s$ .

### مثال ٨ :

في الشبكة الكهربائية ذات الشبكتين الفرعيتين والموضحة في الشكل ١٧ - ٩، اختر تياراً الشبكة بدلالة  $s$  كما هو موضح في الرسم. فلذا أطلق المتاح عند  $t = 0$  فأوجد معادلتى  $I_1(s)$  و  $I_2(s)$ .

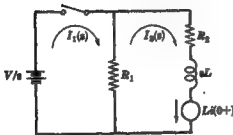
عند خلق المتاح يؤثر المصدر  $V/s$  على الشبكة الكهربائية وتكون معادلتا تيار الشبكة هما :

$$R_1 I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

$$(R_1 + R_2 + sL) I_2(s) - R_1 I_1(s) = L i(0+)$$

وبما أن التيار الابتدائي في الملف يساوى صفراً فإن المعادلات في الصيغة المصفوية تكون

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ 0 \end{bmatrix}$$



شكل ١٧ - ٩

والآن نحصل على معادلي  $I_1(s)$  و  $I_2(s)$  المستقلين إما بالتعويض أو بطريقة المحددات ، والمادتان الناتجتان هما :

$$I_2(s) = \frac{V}{s(R_2 + sL)} \quad , \quad I_1(s) = \frac{V}{s} \left[ \frac{R_1 + R_2 + sL}{R_1(R_2 + sL)} \right]$$

### مثال ٩ :

اكتب معادلة جهد العقدة في نطاق  $s$  للشبكة الكهربائية

الموضحة في الشكل ١٧ - ٩٩

نختار العقدة 1 وعقدة الإسناد كما هو موضح في الرسم وعند خلق المفتاح تكون معادلة العقدة هي :

$$\frac{V_1(s) - V/s - L i(0+)}{sL} + \frac{V_1(s)}{R_1} + \frac{V_1(s)}{R_2} = 0$$

أو

$$(1/sL + 1/R_1 + 1/R_2) V_1(s) = \frac{V/s + L i(0+)}{sL}$$

شكل ١٧ - ١٠

وبما أن التيار الابتدائي في الملف يساوي صفراً ، إذن فالمعادلة لجهد العقدة  $V_1(s)$  هي .

$$V_1(s) = \frac{V}{s} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + sL R_2 + sL R_1} \right)$$

### مثال ١٠ :

اكتب معادلات تيار الشبكة في نطاق  $s$  للشبكة

الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١١ علي أنه يوجد حل المكثف شحنة ابتدائية  $q_0$  عند الزمن الذي أطلق عنده المفتاح .

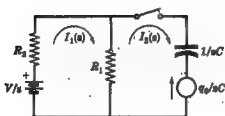
نختار تيارات الشبكة كما هو موضح في الرسم :  
بتطبيق قانون كير شوف حل المسارين المنفصلين ينتج :

$$(R_1 + R_2) I_1(s) - R_1 I_2(s) = V/s$$

و

$$(R_1 + 1/sC) I_2(s) - R_1 I_1(s) = -q_0/sC$$

شكل ١٧ - ١١



وبكتابة حالتين المعادلتين في الصيغة المستوفية نحصل على :

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + 1/sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V/s \\ -s_0/sC \end{bmatrix}$$

### مسائل محلولة

١٧-١ أوجد تحويل لابلاس للدالة  $e^{-at} \cos \omega t$  حيث  $a$  ثابت .

يعطى الماداة المرفقة  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  على الدالة المطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] &= \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[ \frac{-(s+a) \cos \omega t e^{-(s+a)t} + e^{-(s+a)t} \omega \sin \omega t}{(s+a)^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

١٧-٢ إذا كان  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  فبين أن  $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$  . طبق هذه النتيجة على المسألة ١٧-١ .

لدينا من التعريف أن :  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$  . إذن

$$(١) \quad \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} [f(t)e^{-st}] dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

وحيث أن  $\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  ، ( أنظر المجلد ١٧-١ ) ، ينتج من (١) أن

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad , \quad \text{كما تبين في المسألة ١٧-١ .}$$

١٧-٣ أوجد تحويل لابلاس للدالة  $f(t) = 1 - e^{-at}$  حيث  $a$  ثابت

لدينا

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1 - e^{-at}] &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-at})e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)} \end{aligned}$$



$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] \quad \text{أوجد} \quad 17 - 4$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{1}{s(s^2 - a^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + a} + \frac{C}{s - a}$$

والمعاملات هي :

$$A = \left. \frac{1}{s^2 - a^2} \right|_{s=0} = -\frac{1}{a^2} \quad B = \left. \frac{1}{s(s-a)} \right|_{s=-a} = \frac{1}{2a^2} \quad C = \left. \frac{1}{s(s+a)} \right|_{s=a} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1/a^2}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/2a^2}{s+a} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/2a^2}{s-a} \right] \quad \text{ولدينا الآن}$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة في الجدول ١٧ - ١

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 - a^2)} \right] = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} e^{-at} + \frac{1}{2a^2} e^{at}$$

$$= -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \right) = \frac{1}{a^2} (\cosh at - 1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] \quad \text{أوجد} \quad 17 - 5$$

باستخدام طريقة الكسور الجزئية نحصل على

$$\frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

$$C = \left. \frac{s+1}{s} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2}, \quad A = \left. \frac{s+1}{(s+2)^2} \right|_{s=0} = \frac{1}{4} \quad \text{إذن}$$

ومعاملات الحدود التريينية هي

$$B = \left. \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+1}{s} \right] \right|_{s=-2} = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{4}}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{4}}{s+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}}{(s+2)^2} \right] \quad \text{ولدينا الآن}$$

والدالة الزمنية المناظرة موجودة في الجدول ١٧ - ١

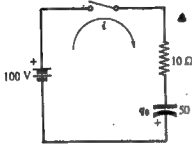
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s^2+4s+4)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{1}{2} t e^{-2t}$$

١٧-٢ في دائرة التوالي المكونة من  $RC$  والموضحة في الشكل ١٧-٢

كان على المكثف شحنة ابتدائية  $q_0 = 2500 \times 10^{-6}$  coulombs

وعند  $t = 0$  أُغلق المفتاح وأُخرج جهد ثابت  $V = 100$  volts

على الدائرة . استخدم تحويل لابلاس لتحصل على التيار .



شكل ١٧-٢

إن معادلة الدائرة المطبقة في نطاق الزمن بعد خلق المفتاح هي

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

$$10i + \frac{1}{50 \times 10^{-6}} \int i dt = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس لحود المعادلة (١) نحصل على المعادلة في نطاق  $s$  :

$$(2) \quad 10 I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6} s} + \frac{q_0}{50 \times 10^{-6} s} = \frac{100}{s}$$

وطبقية  $q_0$  الموضحة في الرسم تماثل قطبية الشحنة التي يربطها المصدر على المكثف ، إذن المعادلة في نطاق  $s$  هي

$$(3) \quad 10 I(s) + \frac{I(s)}{50 \times 10^{-6} s} - \frac{2500 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-6} s} = \frac{100}{s}$$

$$(4) \quad I(s) \left\{ \frac{10s + 2 \times 10^4}{s} \right\} = \frac{180}{s} \quad \text{وبإعادة ترتيب الحدود}$$

$$(5) \quad I(s) = \frac{18}{s + 2 \times 10^3}$$

ونحصل على البنية الزمنية الآن بأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة (٥) :

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{18}{s + 2 \times 10^3} \right] = 18e^{-2 \times 10^3 t} \text{ amperes}$$

إذا كانت الشحنة الابتدائية  $q_0$  موجبة على ألواح المولى للمكثف . تكون إشارة  $q_0/sC$  في المعادلة (٣)

موجبة . إذن يصبح الطرف الأيمن في المعادلة (٤)  $50/s$  ، وعلى ذلك يتولد التيار المأخر  $5e^{-2 \times 10^3 t}$  amperes

١٧-٧ في دائرة  $RL$  الموضحة في الشكل ١٧-٢ وضع المفتاح في الموضع 1 لفترة زمنية كافية للوصول إلى شروط الحالة المستقرة ، وعند  $t = 0$  تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار الناتج .

نفرس أن اتجاه التيار كما هو موضحاً في الرسم . إذن

$$i_0 = -50/25 = -2 \text{ A}$$

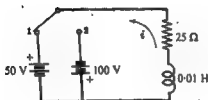
والمعادلة بدلالة الزمن هي

$$(1) \quad 25i + 0.01(di/dt) = 100$$

وبأخذ تحويل لابلاس للمعادلة ( ١ )

$$(2) \quad 25I(s) + 0.01sI(s) - 0.01i(0+) = 100/s$$

وبالتعويض عن  $i(0+)$  نجد



شكل ١٧ - ١٣

$$(3) \quad 25I(s) + 0.01sI(s) + 0.01(2) = 100/s$$

$$(4) \quad I(s) = \frac{100}{s(0.01s + 25)} = \frac{0.01s}{0.01s + 25} = \frac{10^4}{s(2500)} = \frac{2}{s \cdot 2500}$$

وبذلك  $\frac{10^4}{s(2500)}$  في المعادلة ( ٤ ) بطريقة الكسور الجزئية

$$(5) \quad \frac{10^4}{s(s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2500}$$

$$B = \frac{10^4}{s} \Big|_{s=-2500} = -4 \quad \text{و} \quad A = \frac{10^4}{s + 2500} \Big|_{s=0} = 4 \quad \text{إذن}$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة ( ٤ ) ينتج

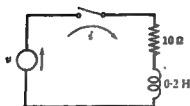
$$(6) \quad I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 2500} = \frac{2}{s} - \frac{6}{s + 2500}$$

وبأخذ معكوس تحويل لابلاس للمعادلة ( ٦ ) ، نحصل حل  $i = 4 - 6e^{-2500t}$  amperes

١٧ - ٨ إذا أثر على دائرة التوالي  $RL$  الموضحة في الشكل ١٧ - ١٤ جهد

أسي يعطى بالعلاقة  $v = 50e^{100t}$  volts . وذلك بفك المفتاح

عند  $t = 0$  فأوجد التيار الناتج .



شكل ١٧ - ١٤

$$(1) \quad Ri + L(di/dt) = v$$

وبأخذ هذه المعادلة في لعلاق  $s$  الشكل

$$(2) \quad RI(s) + sLI(s) - Li(0+) = V(s)$$

بالتعويض عن ثوابت التيار والمصدر بعد تحويله إلى  $V(s) = 50/(s + 100)$  في المادة (٢) نجد

$$(٣) \quad I(s) = \frac{250}{(s+100)(s+50)} \quad \text{أو} \quad 10 I(s) + s(-3) I(s) = \frac{50}{s+100}$$

باستخدام صيغة مطكوك هيلبيد  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{n=1}^N \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)}$  حيث

$$s_1 = -100 \quad , \quad Q'(s) = 2s + 150 \quad \text{و} \quad Q(s) = s^2 + 150s + 5000 \quad \text{و} \quad P(s) = 250$$

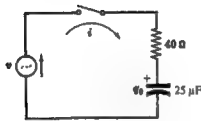
إذن  $a_2 = -50$  .

$$i = \mathcal{L}^{-1} [I(s)] = -\frac{250}{50} e^{-100t} + \frac{250}{50} e^{-50t} = -5e^{-100t} + 5e^{-50t} \text{ amperes}$$

٩-١ يثرر حل دائرة التوال  $RC$  الموضحة في الشكل ١٥ - مصدر

جهد جوي  $v = 180 \sin(2000t + \phi)$  volt ، لذا كان  
 على المكثف شحنة ابتدائية  $q_0 = 1250 + 10^{-6} \text{ coulombs}$   
 بالقطبية الموضحة في الرسم . فبين اختيار علماً بأن المتناح أفقى عند  
 الزمن الذى كانت عند  $\phi = 90^\circ$  .

معادلة التائرة بدلالة الزمن هى



شكل ١٧ - ١٥

$$(١) \quad 40i + \frac{1}{25 \times 10^{-6}} \int i dt = 180 \sin(2000t + 90^\circ)$$

ويخرج من تحويل لابلاس للمعادلة (١) معادلة في نطاق  $s$  .

$$(٢) \quad 40 I(s) + \frac{1}{25 \times 10^{-6} s} I(s) + \frac{q_0}{25 \times 10^{-6} s} = 180 \left\{ \frac{s \sin 90^\circ + 2000 \cos 90^\circ}{s^2 + 4 \times 10^4} \right\}$$

وبالتعويض عن الشحنة  $q_0$  في المادة (٢) يأتج

$$(٣) \quad 40 I(s) + \frac{4 \times 10^4}{s} I(s) + \frac{1250 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6} s} = \frac{180 s}{s^2 + 4 \times 10^4}$$

$$I(s) = \frac{4.5 s^2}{(s^2 + 4 \times 10^4)(s + 10^3)} - \frac{1.25}{s + 10^3}$$

وبتطبيق صيغة مطكوك هيلبيد على الحد  $\frac{4.5 s^2}{(s^2 + 4 \times 10^4)(s + 10^3)}$  في المادة (٤) ، نحصل على  $4.5 P(s)$

$$Q'(s) = 3 s^2 + 2 \times 10^3 s + 4 \times 10^4 \quad \text{و} \quad Q(s) = s^3 + 10^3 s^2 + 4 \times 10^4 s + 4 \times 10^4$$

إذن  $a_2 = 10^3$  ،  $a_1 = -2 \times 10^3$  ،  $a_0 = 4 \times 10^4$  .

$$(٤) \quad i = \frac{P(-2 \times 10^3)}{Q'(-2 \times 10^3)} e^{-2 \times 10^3 t} + \frac{P(10^3)}{Q'(10^3)} e^{10^3 t} + \frac{P(-10^4)}{Q'(-10^4)} e^{-10^4 t} = 1.25 e^{-10^4 t} \text{ amperes}$$

$$+ (1.8 - 0.9) e^{-2 \times 10^3 t} - (1.8 - 0.9) e^{10^3 t} = 0.35 e^{-10^4 t} \text{ amperes}$$

$$+ 1.8 \sin 2000t - 3.6 \cos 2000t = 0.35 e^{-10^4 t} + 4.02 \sin(2000t + 116.6^\circ) - 0.35 e^{-10^4 t} \text{ amperes}$$

عند  $t = 0$  يمتلئ التيار بقسمة الجهد الحثلي المكون من جهد المصدر وجهد المكثف المضبوط على المقاومة إذن

$$i_0 = \left( 180 \sin 90^\circ - \frac{1850 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-6}} \right) / 40 = 3.25 \text{ A}$$

ونحصل على نفس النتيجة إذا وضعنا  $\phi = 0$  في المعادلة (٤)

١٧-١٠ في دائرة التوالي  $RL$  الموضحة في الشكل ١٧-١٦ يمتلئ مصدر

الجهد الجبري بالعلاقة  $v = 100 \sin(500t + \phi)$  volts

بين التيار الناتج إذا أطلق المفتاح عندما كانت  $\phi = 0$ .

المعادلة العامة في نطاق  $s$  لدائرة  $RL$  على التوالي هي

$$(١) \quad R I(s) + s L I(s) = L I(0^-) + V(s)$$

وبتحويل المصدر عند  $\phi = 0$  هو  $V(s) = \frac{500(100)}{s^2 + (500)^2}$

لأنه لا يوجد تيار ابتدائي في الملف؛  $L I(0^-) = 0$

بالتمويض عن ثوابت الدائرة في المعادلة (١)

$$(٢) \quad I(s) = \frac{5 \times 10^4}{(s^2 + 25 \times 10^4)(s + 500)} \quad \text{و} \quad 5 I(s) + 0.01 s I(s) = \frac{5 \times 10^4}{s^2 + 25 \times 10^4}$$

وبذلك (٢) باستخدام الكسور الجزئية

$$(٣) \quad I(s) = \frac{5}{s} \left( \frac{-1+j}{s+j500} \right) + \frac{10}{s+j500}$$

ويكون مكموس لابلاس للمعادلة (٣) هو

$$i = 10 \sin 500t - 10 \cos 500t + 10e^{-500t} = 10e^{-500t} + 14.14 \sin(500t - \pi/4) \text{ amperes}$$

١٧-١١ في المسألة ١٧-١٠ ، بكتابة دالة الجهد

$$(١) \quad v = 100e^{j500t} \text{ volts}$$

ليكون قد أدخلنا حد جيب تمام في مصدر الجهد. حين تيار الدائرة في المسألة ١٧-١٠ باستخدام المعادلة (١).

بينما  $v = 100e^{j500t}$  فإن  $V(s) = 100/(s - j500)$  والمعادلة في نطاق  $s$  هي

$$(٢) \quad I(s) = 10^4/(s - j500)(s + 500) \quad \text{و} \quad 5 I(s) + 0.01 s I(s) = 100/(s - j500)$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد

$$(٣) \quad I(s) = \frac{10}{s - j500} + \frac{-10}{s + 500}$$

والآن بأخذ مكموس تحويل لابلاس للمعادلة (٣) ، تكون دالة التيار الزمنية المناظرة هي

$$= (10 - j10)e^{j500t} + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes}$$

$$= 14.14e^{j(500t - \pi/4)} + (-20 + j10)e^{-500t} \text{ amperes}$$

$$= 14.14[\cos(500t - \pi/4) + j \sin(500t - \pi/4)] + (-10 + j10)e^{-500t} \text{ amperes ,}$$

وحيث أن مصدر الجهد في المسألة ١٧ - ١٠ يحوى فقط من الجزء التثبيطى للمعادلة ( ٤ ) .

$$i = 14.14 \sin (500t - \pi/4) , 10e^{-300t} \text{ amperes}$$

١٧ - ١٧ إذا كان في دائرة التوالي  $RLC$  الموضحة في الشكل ١٧ - ١٧ .

لا يوجد شحنة ابتدائية على المكثف . وأغلق المفتاح عند  $t = 0$  .  
فبين التيار الناتج .

معادلة الدائرة بدلالة الزمن هي

$$(1) \quad RI + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = V$$

وينتج من تحويل لابلاس لمعادلة (١) معادلة في نطاق  $s$  هي

$$17 - 17 \text{ شكل ( ٢ ) } \cdot RI(s) + sLI(s) - Li(0+) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{q_0}{sC} = \frac{V}{s}$$

ونجد من الشروط الابتدائية  $0 = Li(0+) , q_0/sC = 0$  . وبالتعميم من ثمرات الدائرة في المعادلة ( ٢ )  
نحصل على

$$(3) \quad 2I(s) + 10sI(s) - 0.5sI(s) = \frac{50}{s}$$

$$(4) \quad I(s) = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{(s+1+j)(s+1-j)} \quad \text{أو}$$

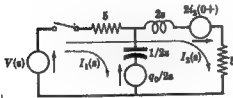
وبذلك المعادلة ( ٤ ) بطريقة الكسور الجزئية نجد أن

$$(5) \quad I(s) = \frac{j25}{(s+1+j)} - \frac{j25}{(s+1-j)}$$

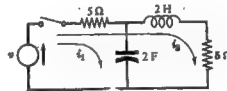
وينتج من معكوس تحويل لابلاس للمعادلة ( ٥ ) التيار بدلالة الزمن

$$i = j25(e^{(-1-j)t} - e^{(-1+j)t}) = 50e^{-t} \sin t \text{ amperes}$$

١٧ - ١٢ في الشبكتين الفرعيتين للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١٨ ، اعتبر أن تيارا الشبكة كما هو موضح في الرسم . اكتب معادلات نطاق  $s$  في الصيغة المصفوفية ثم صمم الدائرة المناظرة .



شكل ١٧ - ١٨



شكل ١٧ - ١٨

اكتب مجموعة المعادلات بدلالة الزمن

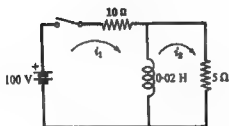
$$(1) \quad 10i_2 + 2(di_1/dt) + 5i_1 = v \quad \text{و} \quad 5i_1 + \frac{1}{2} \int i_1 dt + 5i_2 = v$$

لأخذ تحويل لابلاس للمعادلة (١) نحصل على المعادلات المتطابقة في نطاق  $s$

$$(٢) \quad 5I_1(s) + \frac{1}{2s}I_1(s) + \frac{q_0}{2s} + 5I_2(s) = V(s) \quad 10I_2(s) + 2sI_2(s) - 2i_2(0+) + 5I_1(s) = V(s)$$

عند كتابة معادلات نطاق  $s$  في السلسلة المتوازية فإنه يمكن تعيين الجاهات في نطاق  $s$  بلمس صفوفات  $Z(s)$  و  $I(s)$  و  $V(s)$  (أنظر الشكل ١٧ - ١٩)

$$\begin{bmatrix} 5 + 1/2s & 5 \\ 5 & 10 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(s) - q_0/2s \\ V(s) + 2i_2(0+) \end{bmatrix}$$



شكل ١٧ - ٢٠

١٧ - ١٩ في الشبكتين الفرعيتين الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ١٩ ، أوجد التيارات الناتجة عند غلق المفتاح

المعادلات بدلالة الزمن للشبكة الكهربائية هي

$$\begin{aligned} 10i_1 + 0.02 \frac{di_1}{dt} - 0.02 \frac{di_2}{dt} &= 100 \\ 0.02 \frac{di_1}{dt} + 5i_2 - 0.02 \frac{di_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

بأخذ تحويل لابلاس المجموعة (١) ،

$$(٢) \quad (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02I_2(s) = 100/s \quad (5 + 0.02s)I_2(s) - 0.02sI_1(s) = 0$$

من المعادلة الثانية في المجموعة (٢) ، نجد أن

$$(٣) \quad I_2(s) = I_1(s) \left( \frac{s}{s + 250} \right)$$

وبالتعويض بها في معادلة نطاق  $s$  الأولى نحصل على

$$(٤) \quad (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02s \left\{ I_1(s) \left( \frac{s}{s + 250} \right) \right\} = \frac{100}{s}$$

$$(٥) \quad I_1(s) = 0.07 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\} \quad \text{أو}$$

والآن بتطبيق طريقة الكسور الجزئية على المعادلة (٥) ، نجد

$$(٦) \quad i_1 = 10 - 3.33e^{-166.7t} \text{ amperes} \quad I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s + 166.7}$$

وأيضاً بالتعويض بالمعادلة (٥) في المعادلة (٣) نحصل على المعادلة في نطاق  $s$

$$(٧) \quad i_2 = 6.67e^{-166.7t} \text{ amperes} \quad I_2(s) = 0.07 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\} \frac{s}{s + 250} = 0.07 \left( \frac{1}{s + 166.7} \right)$$

١٥ - ١٧ طبق نظرية القيمة الابتدائية والنهائية على معادلات نطاق  $s$  ،  $I_2(s)$  و  $I_1(s)$  في المسألة ١٧ - ١٤ .

إن معادلات نطاق  $s$  من المسألة ١٧ - ١٤ هي

$$I_2(s) = 0.07 \left( \frac{1}{s + 166.7} \right) \quad I_1(s) = 0.07 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\}$$

والآن نحل القيمة الابتدائية لتيار  $i_1$  بالمعادلة

$$i_1(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 0.67 \left( \frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 0.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية بالمعادلة

$$i_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_1(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 0.67 \left( \frac{s + 250}{s + 166.7} \right) \right] = 0.67(250/166.7) = 1.0 \text{ A}$$

والقيمة الابتدائية لتيار  $i_2$  هي

$$i_2(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ 0.67 \left( \frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 0.67 \text{ A}$$

والقيمة النهائية هي

$$i_2(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I_2(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 0.67 \left( \frac{s}{s + 166.7} \right) \right] = 0$$

إن خمس دائرة الشكل ١٧ - ٢٠ يحقق كلا من التبع الابتدائية والنهائية السابقة . عند لحظة خلق المتاح تكون معاوقة الحث لانهاية ويكون التيار  $i_1 = i_2 = 100/(10 + 5) = 0.67 \text{ A}$  . إذن في الحالة المستقرة يظهر الحث كدائرة مغلقة ، إذن  $i_2 = 10 \text{ A}$  و  $i_1 = 0$  .

١٧ - ١٦ بالإشارة إلى دائرة الشكل ١٧ - ٢٠ ، أوجد المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية وصمم الدائرة باستخدام هذه المعاوقة .

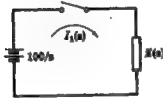
في نطاق  $s$  تكون معاوقة الحث  $0.02 \text{ H}$  هي  $Z(s) = 0.02s$  والتي يمكن معالجتها تماماً مثل  $j\omega L$  في الحالة المستقرة الجبرية . وحل ذلك فإن المعاوقة المكافئة للشبكة الكهربائية عند النظر إليها من المصدر تكون

$$(1) \quad Z(s) = 10 + \frac{0.02s(5)}{0.02s + 5} = \frac{0.3s + 50}{0.02s + 5} = 15 \frac{s + 166.7}{s + 250}$$

ويوضح الشكل ١٧ - ٢١ الدائرة المخفضة حل المعاوقة المكافئة .

والتيار هو

$$I_1(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s} \left\{ \frac{s + 250}{15(s + 166.7)} \right\} \\ = 0.67 \left\{ \frac{s + 250}{s(s + 166.7)} \right\}$$



شكل ١٧ - ٢١

وعدا التعبير مطابق للمعادلة (٥) في المسألة ١٧ - ١٦ ، وحل ذلك

للمعادلة الزمنية هي  $i_1 = 10 - 3.33e^{-100t/57} \text{ amperes}$

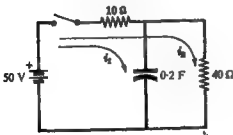
١٧ - ١٦ في الشبكتين الفرعيتين الشبكة الكهربائية الموضحة

في الشكل ١٧ - ٢٢ لا يوجد دسنة ابتدائية على المكثف .

أوجد تيارى الشبكة للثلاثين من خلق المتاح عند  $t = 0$  .

معاودة الدائرة بدلالة الزمن هي

$$(1) \quad 10i_1 + \frac{1}{0.2} \int i_1 dt + 10i_2 = 50 \\ 50i_2 + 10i_1 = 50$$



شكل ١٧ - ٢٢



والمعادلتان المناظرتان في نطاق  $s$  هما

$$(٢) \quad 10 I_1(s) + \frac{1}{0.2s} I_1(s) + 10 I_2(s) = 50/s : 50 I_2(s) + 10 I_1(s) = 50/s$$

وفي المصفوفة المسفوفة هما

$$\begin{bmatrix} 10 + 1/0.2s & 10 \\ 10 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50/s \\ 50/s \end{bmatrix}$$

$$I_1 = 5e^{-0.625t} \text{ amperes} \quad \text{و} \quad I_2(s) = 5/s + 0.625$$

لإيجاد  $I_2$  لموضع عن قيمة  $I_1$  في المعادلة الثانية لمعادلتى لنطاق الزمن (١).

$$I_2 = 1 - e^{-0.625t} \text{ amperes} \quad \text{و} \quad 50 I_2 + 10(5e^{-0.625t}) = 50$$

١٧-١٨ بالإشارة إلى المسألة ١٧-١٧ أوجد المماوطة المكافئة في نطاق  $s$  للشبكة الكهربائية وعين التيار الكلي ثم أوجد تيارى الفرعين وذلك باستخدام قاعدة تقسيم التيار .

المماوطة المكافئة في نطاق  $s$  هي

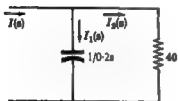
$$(١) \quad Z(s) = 10 + \frac{40(1/0.2s)}{40 + 1/0.2s} = \frac{80s + 50}{s + 1} = 10 \frac{s + 5/8}{s + 1/8}$$

وبوضع الشكل ٢٣-١٧ الدائرة المكافئة ، والتيار الناتج هو :

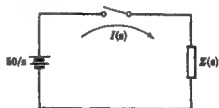
$$(٢) \quad I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \left\{ \frac{s + 1/8}{10(s + 5/8)} \right\} = 5 \frac{s + 1/8}{s(s + 5/8)}$$

وبالتحليل عن المعادلة (٢) بصيغة كسور جزئية نجد :

$$I = 1 + 4e^{-0.8t/5} \text{ amperes} \quad \text{ومنها نجد أن} \quad I(s) = \frac{5}{s} + \frac{4}{s + 5/8}$$



شكل ٢٤-١٧

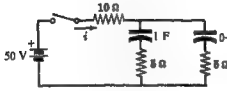


شكل ٢٣-١٧

والآن يمكن الحصول على تيارى الفرعين  $I_1(s)$  و  $I_2(s)$  باستخدام قاعدة تقسيم التيار . وبالإشارة إلى الشكل ٢٤-١٧ نجد لدينا

$$I_1(s) = I(s) \left( \frac{40}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{5}{s + 5/8} \text{ and } i_1 = 5e^{-0.625t} \text{ amperes}$$

$$I_2(s) = I(s) \left( \frac{1/0.2s}{40 + 1/0.2s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5/8} \text{ and } i_2 = 1 - e^{-0.625t} \text{ amperes}$$



شكل ٢٥ - ١٧

١٧ - ١٤ في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ٢٥ ألق الفتح عند  $t = 0$  وكان لا يوجد شحنة ابتدائية على أى من المكثفين أوجد التيار الناتج ، كما هو موضح في الرسم .

يوجد الشبكة الكهربائية ممثلة في نطاق  $s$

$$(i) \quad Z(s) = 10 + \frac{(5 + 1/s)(5 + 1/0.5s)}{(10 + 1/s + 1/0.5s)} = \frac{125s^2 + 45s + 2}{s(10s + 3)}$$

حي

والتيار هو :

$$(v) \quad I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{50}{s} \cdot \frac{s(10s + 3)}{(125s^2 + 45s + 2)} = \frac{4(s + 0.3)}{(s + 0.308)(s + 0.052)}$$

وبالتعويض من التيار في نطاق  $s$  بدلالة كمور جزئية نجد :

$$I = \frac{1}{8} e^{0.308t} + \frac{31}{8} e^{-0.052t} \text{ amperes} \quad , \quad I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052}$$

١٧ - ١٥ طبق نظرية القيمة الابتدائية والنهائية على التيار في نطاق  $s$  في المسألة ١٧ - ١٤ .

$$\text{بما أن : } I(s) = \frac{1/8}{s + 0.308} + \frac{31/8}{s + 0.052} \quad \text{فإن التيار الابتدائي هو}$$

$$i(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s I(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left( \frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 4 \text{ A}$$

والتيار النهائي هو

$$i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s I(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{s}{s + 0.308} \right) + \frac{31}{8} \left( \frac{s}{s + 0.052} \right) \right] = 0$$

بمحص الدائرة المطابقة الشكل ١٧ - ٢٥ يتبين لنا أن المقاومة الكلية للدائرة في البداية هي  $12.5 = 5(5/10)$  و  $R = 10$  .

وحل هذا فإن :  $I(0) = 50/12.5 = 4 \text{ A}$  وفي الحالة المستقرة يكون كل من المكثفين قد شحن لجهود مكافئ

يساوى 50 volts وتيار يساوى صفراً .

### مسائل إضافية

١٧ - ٢١ أوجد تحويل لابلاس لكل حالة بما يأتي :

$$f(t) = \cosh at \quad (a) \quad f(t) = e^{-at} \sin at \quad (b) \quad f(t) = At \quad (1)$$

$$f(t) = e^{-at} \sinh at \quad (c) \quad f(t) = \sinh at \quad (d) \quad f(t) = e^{-at} \quad (2)$$

$$(f) \quad \frac{a}{(s+a)^2 - a^2} \quad (g) \quad \text{أنظر الجدول ١٧ - ١ .}$$

٢٢-٢٧ أوجد بمكوس تحويل لابلاس لكل دالة ما يأتي :

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 8s + 9)} \quad (أ) \quad F(s) = \frac{5}{(s+2)(s+1)} \quad (ب)$$

$$F(s) = \frac{2s}{(s^2+4)(s+5)} \quad (ج) \quad F(s) = \frac{s+5}{s^3+2s+5} \quad (د) \quad F(s) = \frac{1}{s^3+7s+12} \quad (هـ)$$

$$F(s) = \frac{2s+4}{s^3+4s+12} \quad (و) \quad F(s) = \frac{5s}{s^3+8s+2} \quad (ز)$$

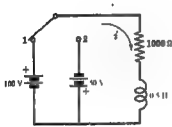
$$\frac{1}{s} \cos 2t + \frac{1}{s} \sin 2t - \frac{1}{s} e^{-2t} \quad (أ) \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2t} - \frac{1}{s} e^{-3t} \quad (ب) \quad 2e^{-2t} - e^{-t} \quad (ج)$$

$$e^{-t}(\cos 2t + 2 \sin 2t) \quad (د) \quad e^{-2t} - e^{-4t} \quad (هـ)$$

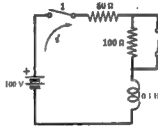
$$2e^{-2t} \cos 2t \quad (و) \quad 10e^{-2t} - 5e^{-t} \quad (ز)$$

٢٢-١٧ دائرة تتكون من  $RL$  فيها  $R = 10 \Omega$  و  $L = 0.2 H$  يقر لها جهد ثابت  $V = 50 \text{ volts}$  عند  $t = 0$  . أوجد التيار الناتج باستخدام طريقة تحويل لابلاس .  
الجواب :  $i = 5e^{-25t} \text{ amperes}$

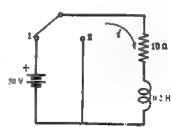
٢٤-١٧ في دائرة التوالي  $RL$  الموضحة في الشكل ٢٦-١٧ كان المفتاح عند الموضع 1 للفترة كافية للوصول إلى الحالة المستقرة ثم تحرك المفتاح إلى الموضع 2 عند  $t = 0$  . أوجد التيار .  
الجواب :  $i = 5e^{-20t} \text{ amperes}$



شكل ٢٨-١٧



شكل ٢٧-١٧



شكل ٢٦-١٧

٢٥-١٧ في الدائرة الموضحة في الشكل ٢٧-١٧ ، ألق المفتاح 1 عند  $t = 0$  ثم عند  $t = t' = 4 \text{ ms}$  فتح المفتاح 2 . أوجد التيار العابر في الفترتين  $0 < t' < t$  .

$$i = 2(1 - e^{-200t}) \text{ amperes}, i = 1.06e^{-1700(t-t')} - 0.667 \text{ amperes}$$

٢٦-١٧ في دائرة التوالي  $RL$  الموضحة في الشكل ٢٨-١٧ ألق المفتاح إلى الموضع 1 عند  $t = 0$  وعند  $t = t' = 50 \text{ sec}$  تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار العابر في الفترتين  $0 < t' < t$  و  $t > t'$  .

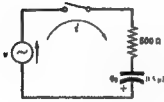
$$i = 0.1(1 - e^{-2000t}) \text{ amperes}, i = 0.06e^{-2000(t-t')} - 0.05 \text{ amperes}$$

٢٧-١٧ دائرة توالى  $RC$  فيها  $R = 10 \Omega$  و  $C = 4 \mu F$  لها شحنة ابتدائية  $q_0 = 800 \times 10^{-6} \text{ coulombs}$  . عل المكث عند الزمن الذي ألق منه المفتاح ، فإذا أنزلنا عليها بجهد ثابت  $V = 100 \text{ volts}$  فأوجد التيار العابر الناتج إذا كانت الشحنة (أ) لها نفس قطبية الشحنة التي يولدها المصدر . (ب) لها قطبية معاكسة .

$$i = 30e^{-25 \times 10^3 t} \text{ amperes} \quad (ب) \quad i = -10e^{-25 \times 10^3 t} \text{ amperes} \quad (أ)$$

١٧- ٢٨ دائرة توال  $RC$  فيها  $R = 1000 \Omega$  و  $C = 20 \mu F$  لها شحنة ابتدائية  $q_0$  على المكثف عند الزمن الذي أطلق منه المفتاح ، ، فإذا أثرنا عليها جهد ثابت  $V = 50$  ، وكان التيار الناتج هو  $i = 0.075e^{-200t}$  amperes فأوجد الشحنة  $q_0$  وبين تطبيقها .  
الجواب :  $500 \cdot 10^{-6}$  coulombs ، بتطبيقه عكس تطبيقه الشحنة التي يولدها المصدر .

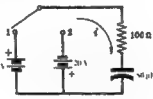
١٧- ٢٩ في دائرة  $RC$  الموضحة في الشكل ١٧- ٢٩ أطلق المفتاح إلى الموضع 1 عند  $t = 0$  وعند  $t = t' = 1$  TC تحرك المفتاح إلى الموضع 2 . أوجد التيار الماهر في الفترتين  $0 < t' < t$  و  $t > t'$  .  
الجواب :  $i = 0.5e^{-200t}$  amperes ,  $i = 0.516e^{-200(t-1)}$  amperes



شكل ١٧- ٣١



شكل ١٧- ٣٠



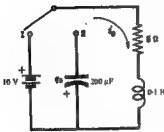
شكل ١٧- ٢٩

١٧- ٣٠ في الدائر الموضحة في الشكل ١٧- ٣٠ ، كان على المكثف  $C_2$  شحنة ابتدائية  $300 \cdot 10^{-6}$  coulombs عند الزمن الذي أطلق منه المفتاح . أوجد التيار الماهر الناتج .  
الجواب :  $i = 2.5e^{-200t}$  amperes

١٧- ٣١ في دائرة التوال  $RC$  الموضحة في الشكل ١٧- ٣١ كانت الشحنة الابتدائية على المكثف  $q_0 = 25 \cdot 10^{-6}$  coulombs والجهد الجيبى المؤثر  $v = 100 \sin(1000t + \phi)$  volts . أوجد التيار الماهر الناتج إذا أطلق المفتاح عند الزمن الذي كان عنه  $\phi = 30^\circ$  .  
الجواب :  $i = 0.1535e^{-4000t} + 0.0484 \sin(1000t + 106)$  amperes

١٧- ٣٢ دائرة توال  $RLC$  فيها  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.1$  H و  $C = 500 \mu F$  يؤثر عليها جهد ثابت  $V = 10$  volts عند  $t = 0$  . أوجد التيار الناتج .  
الجواب :  $i = 0.72e^{-25t} \sin 139t$  amperes

١٧- ٣٣ في دائرة التوال  $RLC$  الموضحة في الشكل ١٧- ٣٣ كانت الشحنة الابتدائية على المكثف  $q_0 = 1$  mC وظل المفتاح في الموضع 1 لمدة تكفي للوصول إلى الحالة المستقرة . أوجد التيار الماهر الذي ينتج عندما يتحرك المفتاح من الموضع 1 إلى الموضع 2 عند  $t = 0$  .  
الجواب :  $i = e^{-222t} (2 \cos 222t - 0.45 \sin 222t)$  amperes



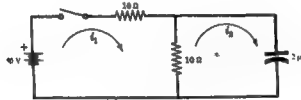
شكل ١٧- ٣٣

١٧- ٣٤ دائرة توال  $RLC$  فيها  $R = 5 \Omega$  و  $L = 0.2$  H و  $C = 1$  F يؤثر عليها مصدر جهد  $v = 10e^{-1000t}$  volts . أوجد التيار الناتج .  
الجواب :  $i = -0.666e^{-1000t} + 0.670e^{-24.4t} - 0.004e^{-0.2t}$  amperes

١٧- ٣٩ دائرة توال  $RLC$  فيها  $R = 200\Omega$  و  $L = 0.5H$  و  $C = 100\mu F$  لها مصدر جهد جيبى  $v = 300 \sin(500t + \phi)$  volts . فإذا أفلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده  $\phi = 30^\circ$  فأوجد التيار المار الناتج .  
الجواب :  $i = 0.517e^{-241-4t} - 0.197e^{-241-4t} + 0.983 \sin(500t - 19)$  amperes

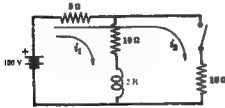
١٧- ٣٩ دائرة توال  $RLC$  لها  $R = 5\Omega$  و  $L = 0.1H$  و  $C = 500\mu F$  لها مصدر جهد جيبى  $v = 100 \sin(250t + \phi)$  volts . فإذا أفلق المفتاح عند الزمن الذى كانت عنده  $\phi = 0^\circ$  فأوجد التيار الناتج .  
الجواب :  $i = e^{-311t} (5.42 \cos 139t + 1.89 \sin 139t) + 5.65 \sin(250t - 73.6^\circ)$  amperes

١٧- ٣٧ فى الشيكيتين الفرعيتين الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧- ٣٣ اخترت التيارات كما فى الرسم . اكتب المعادلات بدلالة الزمن ثم حولها إلى المعادلات المناظرة فى نطاق  $s$  ثم أوجد التيارين المارين  $i_1$  و  $i_2$   
الجواب :  $i_1 = 2.5(1 + e^{-100t})$  amperes,  $i_2 = 5e^{-100t}$  amperes

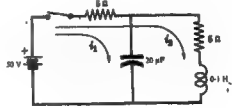


شكل ١٧- ٣٣

١٧- ٣٨ أوجد فى الشيكيتين الفرعيتين الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧- ٣٤ التيارين  $i_1$  و  $i_2$  الناتجين عند خلق المفتاح عند  $t = 0$  .  
الجواب :  $i_1 = 0.101e^{-100t} + 0.899e^{-1000t}$  amperes,  $i_2 = 5.05e^{-100t} + 5.05e^{-1000t}$  amperes



شكل ١٧- ٣٤



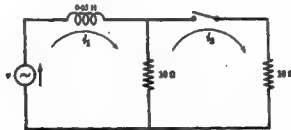
شكل ١٧- ٣٤

١٧- ٣٩ فى الشبكة الكهربائية الموضحة فى الشكل ١٧- ٣٥ يمرر مصدر الجهد 100 volts تيارا متصلان فى المسار الملق الأول . فإذا أفلق المفتاح عند  $t = 0$  ويملك تتصل المقاومة  $10\Omega$  على التوازي مع الفرع الذى يتكون من عنصرين حل التوازي  $R = 10\Omega$  و  $L = 2H$  . فأوجد التيارين الناتجين .  
الجواب :  $i_1 = 1.67e^{-0.071t} + 5$  amperes,  $i_2 = -0.555e^{-0.071t} + 5$  amperes

١٧-٤٠ يؤثر كل الشبكتين الفرعيتين الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل ١٧ - ٣٦ مصدر جهد جيبي  $v = 100 \sin(200t + \phi)$  volts . لدينا أخلق الملتاح عند  $t = 0$  وكاثت الزاوية  $\phi = 0$  وبذلك تتصل المقاومة  $10 \Omega$  الثانية على التوازي مع المقاومة الأولى . فأوجد تيارى الشبكة الناتجين بالاتجاه الموضح في الرسم .

الجواب :

$$i_1 = 3.01e^{-100t} + 8.96 \sin(200t - 63.4^\circ) \text{ amperes}, i_2 = 1.505e^{-100t} + 4.48 \sin(200t - 63.4^\circ) \text{ amperes}$$



شكل ١٧ - ٣٦

## GLOSSARY قائمة بالمصطلحات

### Chapter 1

### الفصل الأول :

Parameter	بارامتر - متغير
S.I. System	نظام مترى دولى
Dimensional Constant	ثابت أبعاد
Permeability Constant	ثابت نفاذية
Coulomb's Law	قانون كولوم
Permittivity Constant	ثابت السماحية
Electromotive Force (emf)	قوة دافعة كهربية
Generator	مولد
Power	قدرة
Periodic Function	دالة دورية
Period	دورة
Energy	طاقة
Resistor	مقاوم
Inductance	حث
Capacitor	مكثف
Pure	نقى
Resistance	مقاومة
Coil	ملف
Self Inductance	حث ذاتى
Capacitance	سعة
Kirchhoff's Law	قانون كير شوف
Network	شبكة كهربية
Instantaneous	لحظى
Square Wave	دالة مربعة
Sawtooth Function	دالة سن منشار
Waveform	شكل موجى
Discontinuous	غير متصل
Sinusoidal Function	دالة جيبية

## Chapter 2

## الفصل الثاني :

Average Value	قيمة متوسطة
Effective Value	قيمة فعالة
Infinite	غير منتهى
Power Series	متسلسلة قوى
Root Mean Square Value	جذر متوسط مربع قيمة
Form Factor	عامل الشكل
Half Cycle Average	متوسط نصف الدورة
Independent Variable	متغير مطلق
Triangular Wave	موجة مثلثة الشكل
Half-Wave Rectification	تقويم نصف موجي
Full-Wave Rectification	تقويم موجي كامل
Delayed	معوقة
Graphical Solution	حل كطبيعي
Amplitude	سعة
Harmonic	توافقي
Fundamental Harmonic	توافقي أساسي
Rise Time	زمن الارتفاع
Radian	زاوية نصف قطرية
Phase	طور

## Chapter 3

## الفصل الثالث :

Sinusoidal Current	تيار جيبى
Integrodifferential Equation	معادلة تكاملية تفاضلية
Transient Current	تيار عابر
Steady Current	تيار مطرد أو مستقر
Impedance	معاوقة
Phase Angle	زاوية الطور
Displacement	إزاحة
Lead	سابق
Lag	لاحق
Resonance	رنين
Frequency	تذبذبة
Parallel	توازي
Reactance	عائمة



## Chapter 4

## الفصل الرابع :

Complex Numbers	أعداد مركبة
Real Numbers	أعداد حقيقية
Rational Numbers	أعداد جزئية
Irrational Numbers	أعداد صماء
Real Number Line	خط العدد الحقيقي
Imaginary	تخيل
Imaginary Number Line	خط العدد التخيل
Polar Representation	تمثيل قطبي
Modulus	مقياس
Argument	الإزاحة الزاوية
Stienmetz	شكل ستينميتز
Rectangular Form	صيغة إحداثيات متعامدة
Trigonometric Form	صيغة حساب مثلثات
Conjugate	مترافق
Binomial	ذات حدين
Numerator	بسط
Denominator	مقام
Slide Rule	سطرحة حاسبة
Cursor	الجزء المتحرك
Hairline	خط شعري

## Chapter 5

## الفصل الخامس :

Phasor Notation	ترميز طورى (أو متاورد)
Waveform	شكل موجي
Periodic	دوري
Fourier Method	طريقة فورييه
Euler's Formula	صيغة إيولر
Particular Solution	حل محاس
Polar Form	شكل قطبي
Angular Velocity	سرعة زاوية
Exponential Function	دالة أسية
Shift Angle	زاوية تفرح
Time Domain	مجال الزمن

Ohm's Law	قانون أوم
Frequency Domain	مجال الترددات
Subscript	رمز سفلى ( دليل )
Locus	محل هندسي

## Chapter 6

## الفصل السادس :

Admittance	معاذمة
Reciprocal	مكسوس
Conductance	مواسلة
Susceptance	تقياية
Polarity	القطبية
Active Circuit	دائرة فعالة ( لحظة )
Bridge	لقطرة

## Chapter 7

## الفصل السابع :

Power	قدرة
Power Factor	عامل القدرة
Alternator	مولد التيار المتردد
Passive	خامل ( غير فعال )
Network	شبكة
Instantaneous Power	قدرة لحظية
Energy	طاقة
Apparent Power	قدرة ظاهرية
Reactive Power	قدرة مخازنية
Quadrature	مركبة عمودية أو مركبة تربيعية
Load	حمل
Synchronous Motor	محرك تزامني
Line Current	تيار الخط

## Chapter 8

## الفصل الثامن :

Quality Factor	عامل الجودة
Band Width	إتساع التردد
Phase Shifting Circuit	دائرة تغيير الطور

## Chapter 9

## الفصل التاسع :

Mesh	شبكة
Network Tree	هيكل الشبكة الكهربائية
Link Branch	فرع اتصال
Junction	لقطة اتصال
Matrix	مصفوفة
Inversion	لماكس
Determinant	محددة
Square Matrix	مصفوفة مربعة
Row	صف
Column	عمود
Sequence	متتالية
Permutation	تبديل
Minors	مجموعات
Cofactor	عامل مشترك
Cramer's Rule	قاعدة كرامر
Driving Point Impedance	نقطة المارعة المحركة
Transfer Impedance	مبارقة الانتقال
Hay Bridge	قنطرة هاي
Owen Bridge	قنطرة أرن
Voltage Transfer Function	دالة انتقال الجهد

## Chapter 10

## الفصل العاشر :

Node	عقدة
Node Voltage Method	طريقة جهد العقدة
Junction	لقطة اتصال
Reference Node	عقدة الاستاد
Self Admittance	مساهمة ذاتية
Mutual Admittance	مساهمة تبادلية
Transfer Admittance	مساهمة انتقال
Wien Bridge	قنطرة فين

## Chapter 11

## الفصل الحادي عشر :

Thevenin's Theorem	نظرية ثفين
Norton's Theorem	نظرية نورتن
Linear Network	شبكة خطية

## Chapter 12

## الفصل الثاني عشر :

Delta	دلتا
Star	نجمة
Superposition Theorem	نظرية التراكب
Bilateral Network	شبكة ذات جانبيين
Reciprocity Theorem	نظرية التبادل
Excitation	إثارة
Response	استجابة
Compensation Theorem	نظرية التعادل (أو المعادلة)
Substitution Theorem	نظرية التعميف
Dependent Source	مصدر غير مستقل
Potentiometer	مقياس الجهد
Maximum Power Transfer Theorem	نظريات انتقال أكبر قدرة
First Derivative	مشتقة تفاضلية أولى

## Chapter 13

## الفصل الثالث عشر :

Mutual Inductance	حث تبادلي
Self Inductance	حث ذاتي
Flux	فيض
Magnetic Flux	فيض مغناطيسي
Induced e.m.f.	قوة دافعة كهربية ناتجة
Leakage	تسرب
Faraday's Law	قانون فارادي
Lenz's Law	قانون لينز
Heaviside Bridge	جسر هيفيسايد

## Chapter 14

## الفصل الرابع عشر :

Polyphase	متعددة الأطوار
Ripple	تموج
Phasor	مطاور
Line Current	تيار الفرع
Phasor Diagram	شكل مطوري
Wattmeter	الواتميتر
Line Voltage	جهد الفرع
Efficiency	كفاءة
Out Put	مطاه

## Chapter 15

## الفصل الخامس عشر :

Fourier Method	طريقة فوريير
Singular Function	دالة وحيدة
Finite	محدود
Harmonic	تردد
Frequency	ذيلية
Trigonometric Series	متسلسلة مثلثية
Discontinuous	غير متصل
Dirichlet Conditions	شروط دريشليت
Converge	تتقارب
Exponential Series	متسلسلة أسية
Even Function	دالة زوجية
Odd Function	دالة فردية
Half - Wave Symmetry	تماثل نصف الموجة
Line Spectrum	طيف خطي
Waveform Synthesis	تركيب الشكل الموجي
Effective Value	القيمة الفعالة
Root Mean Square Value	جذر متوسط مربع القيمة
Pulse	نبضة
L'Hospital's Rule	قاعدة لوبيتال

## Chapter 16

## الفصل السادس عشر :

Transient Interval	فترة عابرة
Complementary Function	دالة متممة
Particular Solution	حل خاص
Operator	مؤثر
Order	رتبة
Exponential Rise	ارتفاع أسّي
Time Constant	ثابت الزمن
Decay	اضمحلال
Short Circuit	دائرة مغلقة
Homogeneous Equation	معادلة متجانسة
Characteristic Equation	معادلة مميزة
Overdamped	زائد المصادة
Critical Damped	مضادة حرجية
Underdamp	نقص المضادة

Slope	ميل
Complete Solution	حل تام
Method of Undetermined Coefficients	طريقة المعاملات غير المحددة
Simultaneous differential equations	معادلات تفاضلية آلية

## Chapter 17

## الفصل السابع عشر :

Laplace Transform	متحول ( بتيل ) لابلاس
Time Domain	بدلالة الزمن
Step Function	دالة سلمية
Integration By Parts	تكامل بالتجزئة
Partial Fraction	الكسور الجزئية
Expansion Methods	طرق الفك
Quotient	خارج القسمة
Polynomial	كثير حدود
Degree	درجة
Heaviside Formula	صيغة هيفيسايد
Simple Poles	أقطاب بسيطة
Distinct	متميزة
Initial Value Theorem	نظرية القيمة الابتدائية
Final Value Theorem	نظرية القيمة النهائية

## فهرس أبجدي

٢٧٩،٢٧٧	طريقة جهازى وانتهى	(١)	اتجاهات المصادر
٢٨٠،٢٦٥	طوران	١٩٣،٤٤	اتجاه الف
٢٦٩	فرع واحد مكاني	٢٤٧،٢٤٦	اتجاه تيارات الشبكة
٢٧٩،٢٧٧،٢٧٥	لدرة	١٤٤	اتزان ثلاثة أطوار
٢٦٦	متتابة	٢٦٨	احمال حل شكل دلتا
٢٦٨،٢٦٧	مصادك	٢٦٨	احمال حل شكل نجمة
٤٤٣	أوم	٢٦٩	طريقة جهازى وانتهى
	(ب)	٢٧٧	كسرة
١	بسر وكون	٢٧٦	اتساع الفرع
١٢٣	بيان المل اغنسى	١٢٧	الفصل
١٢٥	ليار	٣٤٨،٣٤٧	تيار عبر سعة
١٢٤	عناصر متغيرة على التوالى	٣٤٥،٣٤٤	تيار في حث
١٢٥	عناصر متغيرة على التوالى		احمال ذو ثلاثة أطوار غير متزنة
	(ت)	٢٧٦	توصيلات دلتا
	تحويل	٢٧٧	نجمة ، أربعة أسلاك
٢١٩،٢١٥	دلتا إلى نجمة	٢٧٣،٢٧٢	نجمة ، ثلاثة أسلاك
٨٠	مساحة - معاودة		أمسداد
١٩٣،١٩٢	مصادر	٤٨	تقليدية
٢١٩،٢١٥	نجمة إلى دلتا	٤٨	حقليكية
٣٦٦،٣٦٣	توصيلات لايلاس	٤٨	مركبة
٣٣٧	تذبذب ، في ثورات التهور	٤٨	الكثرون
٢٤٦،٢٤٤	ترابط مغناطيسى	٢٤١	الكثرون
٨٠	تقليدية	١	أمير
٨٠	تقليدية حثية	٢٢٠	انتقال أكبر لدرة
٣٠٢،٢٢	تمائل	٢٦٥	أنظمة متعددة الأطوار
٣٠٤،٢٢	تمائل نصف موجى	٢٦٩	أربعة أسلاك
٣٥٥،٣٠٠،٢٦	توافقات	٢٦٨	توصيلات دلتا
	توصيلات دلتا	٢٦٦،٢٦٥	توليد
٢٦٩،٢٦٨	تيارات في	٢٦٩	تيار الفرع
٢٦٨	حمل متزن	٢٦٦	ثلاثة أسلاك
٢٧٢،٢٧١	غير متزنة	٢٦٦	ثلاثة أطوار
٢٧٥	كسرة	٣١	سعة أطوار

٥٢	جلور	٧	تيار
٣٣٦	أعداد مركبة	٨٠٤٧٨	تيارز الـ
٣٦٨٠٣٣٦	لماوى	٢	تعريف اتجاه
٣٦٨٠٣٣٦	حقانية	٧٨	دائرة توازى
٣٦٩٠٣٣٦	شير متساوية	٧٧٠٣٤	دائرة توازى
٣٦٩٠٣٣٦	متراكبة مركبة	٣٢٨	عابر
٣٦٩٠٣٣٦	مكسورة	١٢٥	محل هنسى
٨	جزء تقبل لـ	١٩٤	مصدر
٧٩	عدد مركب	١٤٧	مصفوفة
٦١	مساحة مركبة	٦٥	مطاوور
	معاولة مركبة	٣٦٥	نطال
	جميع الـ	١٩٤	نورين المكافئ
٥٠	أعداد للمركبة	٢٦٩	تيارات أفرع ( أطوار مصدقة )
٧٨٠٧١٠٤٠٠٧٠٤	تيارات	١٤٣	تيارات مسارات مغلقة
٧٧٠٧٣٠٧١٠٤	جهود		( أنظر أيضا تيار شبكية )
٧٧	معاوقات	٣٢	تيارات و جهود جيبية
٢١	ج م م ( قيمة فعالة )	١٤٣	تيار شبكية
٢١	تعريف	١٤٧	صيغة مصفوية
٣٠٦	لتسلسلة فورير	١٤٤٠١٤٣	معاولات
٢	جهود	٢٤٧	تيار طبيعى
٧٧	ارتفاع فى	٢٦٩	تيار طبيعى ( مصدر الأطوار )
٢٤٤	تأثيرى		تيار متردد
١٩٢	التنين المكافئ	٣٣٧	عابر
١٨١٠١٦١	دالة اتصال	٢٦٥	نظام لثلاثة أطوار
١٧٠	مقاسة	٢٦٥	نظام ذو طورين
٢٦٧٠٢٦٦	أفرع	٦	تيار مستجيب
٢٦٨	مطاوور	٣٢٨	تيار مستمر عابر
٧٧٠٤	هبوط فى	٣٣٢	دائرة مقاومة ومكثف
٤٠٢	جول	٣٣٥	دائرة مقاومة ومكثف وملف
		٣٢٨	دائرة مقاومة وملف
(ج)			(ث)
٣٢٩٠٣٢٨٠٦١٠٤	حالة مستقرة		ثابت الزمن
٣٣٧٠٣٢	حالة مستقرة جيبية	٣٢٩	ثلاثة أطوار
٤٠٣	حث	٢٦٥	
٢٤٤	تبادل		
١٠	توصيل حل التوازى		(ج)
١٠٠٤٩	توصيل حل التوالى		جلو متوسط مربع القيمة
٣٣٠٤٢	طاقة مخزنة فى	٢١	



٣٠٤٣٠٧	دوال زوجية	٢٤٥	حث معامل تبادل
٢٦٣	سلمية	٢٤٤	حث تبادل
٣٠٤٣٠٧	فردية	٢٤٨	ترميز نقطى
٣٢٨	متعممة	٢٤٦	تساوى M 12 و M 12
٧٨٠٣٥٠٦	دوائر توازى	٢٥١	توصيل على التوازى
١١٨	أصغر قيمة لتيار	٢٥١٠٢٥٠	توصيل على التوازى
١١٨	أكبر قيمة لمقاومة	٢٤٦	قطبية الجهد
١١٨	رلين	٢٢٨	حل خاص
١٧٥	عمل هنسى		
٨٠٠٧٩	مساحة	(د)	
٨٠٠٧٨	مقاومة		
٨٠	مواصلة	١٨١٠١٦١	دالة انتقال الجهد
١٠٥٠١٠٤٠١٠٣	قدرة وعامل قدرة		دالة جيبية
١٧٢	قيمة عامل جودة	٢٤	لقوم نصف موجى
٣٤٠٦٠٤	دوائر دوال	٢٤	لقوم موجى كامل
٧٧٠٣٤	تيار	٢٣	ج م م قيمة
١١٨	رلين	٢٩٨٠٢٢	دورة
١٢٤٠١٧٣	عمل هنسى لمقاومة	٢٣٠٢٢	قيمة فعالة
٦٢٠٦١	مقاومة	٢٣	قيمة متوسطة
٨١٠٣٧	مقاومة ومكثف	٢٤	قيمة متوسطة لنصف دورة
٧٧٠٣٨	مقاومة ومكثف ومكثف	٣٦٣	دالة سلمية
٨١٠٣٦	مقاومة ومكثف	٣٢٨	دالة متعممة
٢٥٠٠٢٤٤	دوائر مترابطة		ذاصرة
٢٤٤	ليغس تبادل	٧٩٠٧٨	توازى
٢٤٤	ليغس مقسرب	٧٧	توازى
٢٩٨٠٢١	دورة	٢٦٨	ثلاثة أطوار
	دورى	٤٠٣	لوايت
٢٩٨٠٢١	دوال	١١٧	رلين
٢١	شكل موجى	٢٦٥	طوران
		٤٠٣	متناسر
(د)		٢٤٤	مترابطة
	لمساحة	٨١٠٣٣	مقاومة
١٧٢	النح فريط	٨١٠٣٣	مقاومة ومكثف
١١٨	رلين توازى	٨١٠٣٤	مقاومة ومكثف
١١٧	رلين توازى	٣٧٤	نطاق S
٢٤٥	طبيعة	٢٦٩	دائرة ذات فرع واحد مكافئة
٣٥٥	طب ( طب عمل )	٢٥٥٠٢٠٧٠١٦٦٠٩٠	دائرة قطارة
١٧٢	عالية ، منتصف القدرة		دوال
		٢٩٨٠٢١	دورية

٢٢٤	لمعة عابرة	١٢٢	دبذبة منطلمة ، منصف الللمة
٢٢٨	لمروط ألسلمة لللمرات العابرة	٦٥	لمطال
٢٩٩	لمروط وململمت	( ر )	
	لمشكل موملم		وللمن
٢٩٨	لململم لمور	١١٩٠١١٨	لململة لموازم
٣٥٥	لمركلم	١١٧	لململة لمالم
٣٥٢٠٢٢	لملمالم	( ل )	
٣٥٣	لملمم	٦٥٠٣٣	لململة ، لململة أو لململة
٢١	لملمم الملمة	( س )	
٢١	لملمة لملمة		
٢١	لملمة لملمة ، لملمة	٦٤	لملمة لملمة
	( ص )	٤٤٣	لملمة
	لملمة ألمة :	١٣٠١٢	لملمة لملمة
٤٩	لملمة لملمة	١٣٠١٢	لملمة لملمة
٣٥٥	لملمة لملمة لملمة	٣٣٤٠٣	لملمة لملمة بالملمة
٦١٠٤٩	لملمة لملمة	٨٥	لملمة
٤٩	لملمة لملمة لملمة	( ط )	
	( ط )	٢١٣٠٩٩	لملمة لملمة
١٢١٠٢	لملمة	١٤٥	لملمة
	لملمة لملمة	٢١٧٠٢١٦	لملمة لملمة
٣٦٩	لملمة لملمة	١٩٢	لملمة
٣٧٧	لملمة لملمة	١٤٣	لملمة لملمة
٧٧٤	لملمة لملمة لملمة	١٧٥	لملمة لملمة
	لملمة	١٥٣٠٩٦	لملمة لملمة
١٣٥	لملمة لملمة	١٩٤٠١٩٧	لملمة لملمة
٣٣٧٠٦٤٠٣٣	لملمة لملمة	١٤٩	لملمة لملمة
٨١٠٦٥٠٦٤٠٣٣	لملمة لملمة	١٤٣	لملمة لملمة
٨١٠٦٥٠٦٤	لملمة لملمة	١٩٨٠١٩٧	لملمة لملمة
٢٦٦	لملمة لملمة ( لملمة لملمة )	١٥٢	لملمة لملمة
٣٣٥	لملمة لملمة	١٤٣	لملمة لملمة
	( ط )	٢٦٣	لملمة لملمة
		٢١٣٠١٩٧	لملمة لملمة
٢٦٣	لملمة لملمة	١٧١٠١٧٥٠١٤٥	لملمة لملمة
٣٥٧٠٣٣٩	لملمة لملمة	١٤٥	لملمة لملمة
٣٧٥٠٣٤٥	لملمة لملمة	٥٥	لملمة لملمة
٣٦٧٠٣٣٧	لملمة لملمة	٤٤١	لملمة لملمة

١٥٣٠٦٦	قانون أوم	٣٦٣	عابر طريقة لابلاس
٢٤٤	قانون فاراداي	٣٢٨	عابر ، تيار مستمر
٢٤٧	قانون لينز	٣٣٧	دائرة مقاومة ومكثف
٩٦٤٣١٤٤٢	الدوة	٣٣٥	دائرة مقاومة ومكثف وملف
٣٠٨٤٣٠٦	نراقسية	٣٢٨	دائرة مقاومة وملف
١٥٤	دائرة توازي	٢٤٦	عامل الربط
١٠١	دائرة توالي	٢٢	عامل الشكل
٩٩٤٩٨	ظاهرة	١٢١	عامل جودة
٣٠٦	غير جيبية	١٢١	تصريف
٩٦٤٧	خطية	١٢١	دائرة مقاومة ومكثف
٢٧٥	مصدر الاطوار	١٢١	دائرة مقاومة ومكثف وملف
٩٠٠٩٦٢	متوسط	١٢١	دائرة مقاومة وملف
٩٩	مطلت	٩٨٤٩٧	عامل لسانة
٩٨	مفاعلية	١٠١	تصين
٣٠٦	قدرة متوسطة	١٠١	تصحيح
١٩٣٠٨٩٠٨٨٤٢	قطبية الجهد	١٠٠٤٩٩	زاوية
٢٥٥	قطرة هيدريد	٩٩	سائق
	قيم خطية	٩٩	لاسل
٩٤٨٠٦٤٢	اثير والجهد	١٤٩	عامل مفترق
٩٦٤٨٤٢	للقدرة	٤٨	مدف تقيل
٢١	قيمة لسانة		مقدسة
٢٤	لدالة جيبية	١٧٠	أسامية ( أو نقطة اتصال )
٣٠٦	للسلسلة فورير	١٧٠	استاد
٢١	لجنة متوسطة	١٧٠	جهد
٢١	لدالة دورية	١٧٠	معادلات
٣٠٠٠٢١	لدالة غير جيبية	٢١٦٤٣	عناصر دائرة خطية
٢٢	لنصف دورة موجة جيبية		(ف)
	(ك)	٤-٣	فاراد
			فسرج
		٧٩٤٣٥	تيارات
	كيات مركبة	١٢٣	مغير
٤٩	ازاحة زاوية	٤٤٧	فولت
٥٣	تحويل	٢٤٤	فيلس مشرب
٥٠	جمع		
٤٩	صيفة احداتيات مضمنة لـ		(د)
٤٩	صيفة أسية لـ	١٥١	قاعدة كراسر
٤٩	صيفة حساب ملفات لـ	٢٤٨	قاعدة لنقطة ، ملفات مترابطة
٥٠	صيفة شتتينيتز لـ	٧٨٠٧٧٠٣٥٤٤	قانون كيرشوف

	صيفة قطبية لـ	٥٥	مطرحة حاسبة
٥٢	ضرب	٥١	استخدامها
٥	لينة	٥١	مصادر ثابتة
	لوحاريتم	٥٧	مصدر
١٩٤	مقياس	٥٥	قياس
١٩٢	كولسوم	٣٤١	جهد
٣٥٧			غير جوي
٦١			مركب
١٩٦-١٩٧			مكاني
١٤٧	لاحق		مصفوفة
١٤٧	قياس	٣٩٠٣٤	جمع
١٤٧	زاوية طور	٣٩٠٣٤	رتبة آلة
١٤٨	عامل لسندي	٩٨	ضرب
١٤٩			مربطة
١٧٧			مساحة
١٥٣			معاولة
٣٧٨	مطابقة ، متعدد الاطوار	٢٧٦	معدلات تفاضلية
٣٧٨	مجهات	٦٤٠٦٣	معدلات تفاضلية خطية
٣٧٨	مواضع عدد مركب	٥٥	معدلات متعاقبة
٣٣٢	جذور	٣٣٧	معدلات تبادلية
٣٣٦	متسلسلة جيب تمامية ، حجم القيمة	٢٧	معدلات تبادلية
٢٨٥٠٢٨٤	متسلسلة فورييه ،		معدلات التوسع
٣٣	في صيغة أسية	٣٥٥	معاولة
٢١٨٠١٥٤	في صيغة نسب مغلقة	٢٩٨	انقسام
٦٧	متسلسلة ماركوف	٣٥	بيان
١٩٢	متوسط قيمة نصف دورة	٢٢	تقنين المتكاثرة
٧٩٠٧٨	جمال كهربائي	٣٣٤٠٣	دائرة توازي
٧٧	جمال مغناطيسي	٣٣١٠٣	دائرة توازي
١٢٣	مسند	١٤٩	عمل عنصر
٦١	محددات	١٤٩	مركبة
١٥٣	مساحة	٨٥	مصفوفة
٧٧	انتقالية	١٧٤	مكاثرة
١٥٣	بيان	١١٨٠١١٧	لفظة حركة (داخلية)
١٤٠٠١١٨	داخلية	١٧٤	معاولة خطي
٣	دائرة توازي	٨١٠٨٥	مقاوم
٦١٠٤٤٣	دائرة توازي	٨٣	مقاومة
٥٩	مصفوفة	١٧٧	مقياس ، عدد مركب
٨٠٠٧٩	مستوى مساحة	١٢٤	مكاثرة
٧٩	مستوى معاولة	١٢٤	دوائر
			مساحة

٤٨	نظام عدد مركب	٧٧	مكانة معاودة
	نظرية	٣	مكلف
٢١٧	التبادل	٣٣٤٠١٣	طاقة عزولة في
٣٠٧٠٢١٦	التركيب		ملفات
٢١٨	التوصيل	١٢١	عامل جودة
٢١٣	الشبكة الكهربائية	٢٤٥	فيض تفسد
٣٧٢	القيمة الابتدائية		مانعة
٣٧٣	القيمة النهائية	٦٢٤٥٠	حلية
٢١٨	المعادلة	٦٢	سعرية
١٩٧	تقنين	٨٠	مواصلة
١٩٤	نورين	٢٢	موجة من ملشار
٣	لغازية	٢٤	لصالة
١٢٢	نقط منتصف القدرة	٢٤	فعالة
١٧٠٠١٤٥٠٧٨	نقطة اتصال في شبكة	٢٩٩	فوردير
	نقطة حركة	٢٤	متوسط
١٧٤	مساعة	٣١٥٠٣٠٩٠٢٦	موجة مربعة
١٥٣	معاودة	٢٦٦٠٢٦٥	مولد ، متعدد الأطوار

(٥)

(٥)

٤٤٣	قوى	٢١٦٠٢١٥	لجمة - دلنا ، توصيلات
١٤٥	هيكل الشبكة الكهربائية		لطاق
		٦٥	ذنبية
		٣٦٤	ذنبية مركبة
		٦٥	زمن
٤٤٢	وات	٣٧٣٠٣٦٤	S
٢٧٧	والتميز ، طريقة جهازى	٢٧٢٠٢٦٩٠٢٦٦	نظام ثلاثة أطوار - أربعة أسلاك
٢٤٤	فيسر	٤٨	نظام عدد حقيقي

رقم الإيداع ٨٩/٥٢٠٦



TROTT

ELEGARD

HAYY

ZEMANSEY

DAUGHERTY

SHELLEY

SHELLEY

DOBRIK

FRITH

BROWN

STORIS

WOOLLARD

WOOLLARD

FORHEIM

WILSON

EDMINSTER

NASAR

APROCT

GILES

NASH

التبريد وتكييف الهواء

• نظرية أنظمة الطاقة الكهربائية مقدمة

• الكهرباء ومعطيات الهندسة

• الحرارة والديناميكا الحرارية

• ميكانيكا الموائع ونقلها بالهندسة

• الميكانيكا الهندسية

• الميكانيكا الهندسية

• مقدمة في الاستكشاف الجيوفيزيائي

• تكنولوجيا الرسم الهندسي

• الهندسة الميكانيكية نظرية الصناعة

والدراسات المتقدمة

• الإلكترونيات في خدمة التطبيقات الكهربائية

• الإلكترونيات المتكاملة

• أجهزة الحاسبات الدقيقة لطلبة الهندسة والفيزياء

• المبادئ الرياضية

• تكنولوجيا الإلكترونيات

• الدوائر الكهربائية

• الماكينات الكهربائية والكهروميكانيكية

• الديناميكا الحرارية

• ميكانيكا الموائع والهندسة

• مقاومة المواد